Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тверской государственный университет»

Материалы Международной научно-практической конференции «XVIII Колмогоровские чтения»

17–19 сентября 2025 г.

Тверь 2026

УДК 37.091.3
ББК 22.3;22.1 я7
М 34

М 34 Материалы Международной научно-практической конференции «XVIII Колмогоровские чтения» [17–19 сентября 2025 г.] / научн. ред. И.В. Кузнецовой, С.А. Тихомирова. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2026. – 234 с.

В данный сборник включены материалы Международной научно-практической конференции «XVIII Колмогоровские чтения», проходившей в Твери с 17 по 19 сентября 2025 г. Представлены результаты исследований различных научных школ.

Материалы сборника предназначены для широкого круга читателей, интересующихся актуальными проблемами математики, преподавания математики, истории математики.

УДК 37.091.3
ББК 22.3;22.1я7

Редколлегия:

И.Д.Лельчицкий, академик РАО, профессор, доктор педагогических наук (Тверь)

В.В. Афанасьев, профессор, доктор педагогических наук (Ярославль)

Е.И. Смирнов, профессор, доктор педагогических наук (Ярославль)

А.П.Сильченко, доцент, кандидат педагогических наук (Тверь)

С.А. Тихомиров, доцент, кандидат физико-математических наук (Ярославль)

И.В. Кузнецова, доцент, кандидат педагогических наук (Ярославль)

ISBN 978-5-7609-2116-1

© Тверской государственный университет, 2026
© Авторский коллектив, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ I. ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

Афанасьев В.В., Тихомиров С.А. От суммирования целых чисел к вероятности……5
Вечтомов Е.М. К теории полурешеток……..……..11
Подуфалов Н.Д. О повышении качества математического и естественно-научного образования и оптимизации содержания общего образования……19
Прохоров Д.И. Применение возможностей искусственного интеллекта для организации процесса повышения квалификации учителей математики…….……31
Смирнов Е.И. Реализация сложностной парадигмы в математическом образовании как фактор самоорганизации и развития мышления обучающихся……37

РАЗДЕЛ II. СЕКЦИОННЫЕ ДОКЛАДЫ

Антонюк П.Н. О некоторых нерешенных задачах небесной механики……..……..……...57
Афанасьев В.В., Смирнов Е.И., Тихомиров С.А. Николай Христович Розов и Колмогоровские чтения в Ярославле……61
Буракова Г.Ю., Карпова Т.Н. Элективные курсы по математике в школе: традиции и инновации……70
Вечтомов Е.М., Лубягина Е.Н., Широков Д.В. Два доказательства законов дистрибутивности для НОД и НОК……76
Гильмуллин М.Ф. Историко-математические задачи в системе диалога культур……...82
Евланов М.В. Сюжетные задачи по физике как средство формирования технико-конструкторских умений учащихся……88
Зайцев Е.А. От геометрии к аналитике: смена парадигм в математике XVII века……...92
Звонилов В.И. Скелеты тригональных кривых и жесткая изотопическая классификация неособых вещественных алгебраических кривых бистепени (4, 3) на гиперболоиде……99
Игнатушина И.В., Зубова И.К. Г.П. Матвиевская – ученый, педагог, краевед……107
Калинин С.И., Панкратова Л.В. Об одном обобщении дамасского неравенства……113
Кондратьева Г.В. К вопросу о развитии учебно-математических изданий конца XVII- начала XX веков…….…..118

Кузнецова И.В. Интеграция искусственного интеллекта в педагогические практики учителя математики: анализ возможностей, вызовов и перспектив……..…….123
Латышева Л.П., Скорнякова А.Ю., Черемных Е.Л. О подготовке будущих учителей математики и информатики к реализации технологии профессионального самоопределения школьников……..138
Леонтьева Н.В. Построение куба по его диагонали: теоретический и методический аспект……..144
Малых М.Д. От разностной схемы Эйлера к методу Кагана……151
Малышев К.Ю. О вкладе Л.В. Канторовича в теорию суммирования в конечном виде расходящихся рядов Фурье……..…156
Медер Э.А., Налбандян Ю.С. Математика и актуальные тренды формирования архитектурной среды: возможности междисциплинарного взаимодействия……..…..162
Налбандян Ю.С., Полотовский Г.М. История математики на Колмогоровских чтениях (Ярославль, 2003-2015, Коряжма, 2017)…...168
Одинец В.П. О математиках, не доживших до дня Победы……..……174
Секованов В.С., Виноградов Е.В., Ивков В.А., Щепин Р.А. Нейтральные циклы полиномов……..181
Селиверстов А.В. Линейно упорядоченные тела……..190
Симонова Е.Р. Р.А. Симонов – участник Колмогоровских чтений….195
Синкевич Г.И. Развитие математического анализа на страницах Acta Eruditorum. Цепная линия…….……...200
Чемарина Ю.В., Морозова С.И. Анализ заданий, вызвавших наибольшие затруднения у участников ЕГЭ по профильной математике……..……206
Чиненова В.Н. О некоторых работах В.В. Голубева……212
Юлина А.О. Геометрический подход к строгому изложению проблемы вращения твердого тела в работах Б. Римана и Д.К. Максвелла……...218
Сведения об авторах…….……...224

УДК 372.851

В.В. Афанасьев, С.А. Тихомиров

От суммирования целых чисел к вероятности

В работе предлагается цепочка задач от продолжения поиска геометрическим методом «сверток» конечных сумм степеней первых n натуральных чисел к продолжению предложенного пропорционального закона распределения на треугольных числах. Представлены новые, оригинальные результаты, включая удобную с точки зрения практического использования формулу для нахождения сумм десятых степеней первых n натуральных чисел.

***Ключевые слова**: конечные суммы степеней натуральных чисел, законы распределения дискретных случайных величин, математическое ожидание, дисперсия, треугольные числа.*

V. V. Afanasiev, S. A. Tikhomirov

From summation *of* integers to probability

Yaroslavl State Pedagogical University
named after K. D. Ushinsky

The paper proposes a chain of tasks from continuing the geometric search for "convolutions" of finite sums of powers of the first n natural numbers to continuing the proposed proportional distribution law on triangular numbers. New, original results are presented, including a formula that is convenient from the point of view of practical use for finding the sums of the tenth powers of the first n natural numbers.

***Key words:** finite sums of powers of natural numbers, laws of distribution of discrete random variables, mathematical expectation, dispersion, triangular numbers.*

Введение

В течение продолжительного периода времени в Ярославской геометрической школе проводился поиск суммирования различных степеней конечного числа целых чисел [3, 4]. Вероятностная идея суммирования числовых рядов получила геометрическое трактование с использованием аддитивных свойств площадей. Первые результаты в этой области были опубликованы в работе [1] и содержали формулы для нахождения сумм первых четырёх степеней конечного числа натуральных чисел. Впоследствии предложенная идея суммирования была использована для нахождения ещё пяти степеней - до девятой включительно [5]. Дальнейшие шаги привели к поиску использования полученных формул при конструировании новых дискретных законов распределения случайных величин и пополнения списка суммирования первых n натуральных чисел до десятой степени.

Основные результаты

I. Сумма десятых степеней первых n натуральных чисел.

Воспользуемся геометрическим способом суммирования [3, 4, 5] и вычислим сумму девятых степеней первых n натуральных чисел $S_n = 1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \cdots + n^{10}$.

Заполним прямоугольник со сторонами, равными 1 и $(n+1)^{10}$ прямоугольниками, пары сторон которых лежат на сторонах большого прямоугольника, а их вершинами выберем соседние точки, удаленные от стороны прямоугольника, равной 1, на расстояние $1^{11}, 2^{11}, \ldots, n^{11}, (n+1)^{11}$ (см. рисунок 1).

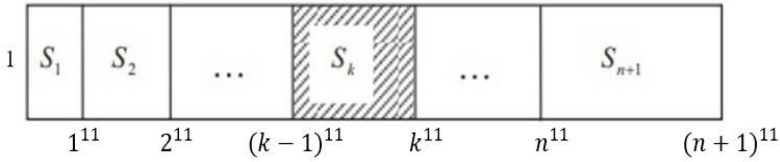


Рис. 1.

Поскольку площадь этого прямоугольника равна $(n+1)^{11} \times 1$, то

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_{n+1} = 1 + (2^{11} - 1^{11}) + \cdots + ((n+1)^{11} - n^{11}) = (n+1)^{11} \times 1.$$

Имеем:

$$(n+1)^{11} = n^{11} + 11n^{10} + 55n^9 + 165n^8 + 330n^7 + 462n^6 + 462n^5 + 330n^4 + 165n^3 + 55n^2 + 11n + 1,$$

тогда

$$(n+1)^{11} - n^{11} = 11n^{10} + 55n^9 + 165n^8 + 330n^7 + 462n^6 + 462n^5 + 330n^4 + 165n^3 + 55n^2 + 11n + 1.$$

Представим площадь каждого «маленького» прямоугольника в последовательности выражением $11n^{10} + 55n^9 + 165n^8 + 330n^7 + 462n^6 + 462n^5 + 330n^4 + +165n^3 + 55n^2 + 11n + 1$, где n будет равно порядковому номеру прямоугольника:

$$1 + (11 \times 1^{10} + 55 \times 1^9 + 165 \times 1^8 + 330 \times 1^7 + 462 \times 1^6 + 462 \times 1^5 + 330 \times 1^4 + 165 \times 1^3 + 55 \times 1^2 + 11 \times 1 + 1) + \cdots + (11n^{10} + 55n^9 + 165n^8 + 330n^7 + 462n^6 + 462n^5 + 330n^4 + 165n^3 + 55n^2 + 11n + 1) = (n+1)^{11};$$

$$1 + 11(1^{10} + \cdots + n^{10}) + 55(1^9 + \cdots + n^9) + 165(1^8 + \cdots + n^8) + 330(1^7 + \cdots + n^7) + 462(1^6 + \cdots + n^6) + 462(1^5 + \cdots + n^5) + 330(1^4 + \cdots + n^4) + +165(1^3 + \cdots + n^3) + 55(1^2 + \cdots + n^2) + 11(1 + \cdots + n) + n = (n+1)^{11};$$

$$11(1^{10} + \cdots + n^{10}) + 55(1^9 + \cdots + n^9) + 165(1^8 + \cdots + n^8) + 330(1^7 + \cdots + n^7) + 462(1^6 + \cdots + n^6) + 462(1^5 + \cdots + n^5) + 330(1^4 + \cdots + n^4) + +165(1^3 + \cdots + n^3) + 55(1^2 + \cdots + n^2) + 11(1 + \cdots + n) + (n+1) = (n+1)^{11}.$$

Откуда, используя суммы первых n натуральных чисел и их степеней до девятой [5], получаем:

$$11(1^{10} + \cdots + n^{10}) = (n+1)^{11} - 55\frac{n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3)}{20} - 165\frac{n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)}{90} - 330\frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24} - 462\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{67} -$$

$$462\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{43}-330\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}-$$
$$165\frac{n^2(n+1)^2}{4}--55\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-11\frac{n(n+1)}{2}-(n+1)=$$
$$\frac{n+1}{12}(12(n+1)^{10}-33n^2(n+1)(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-$$
$$3n+3)-22n(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-$$
$$3)-165n^2(n+1)(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)-132n(2n+$$
$$1)(3n^4+6n^3-3n+1)-462n^2(n+1)(2n^2+2n-1)-$$
$$132n(2n+1)(3n^2+3n-1)-495n^2(n+1)-110n(2n+1)-$$
$$66n-12)=$$
$$=\frac{(n+1)(12n^{10}+54n^9+56n^8-56n^7-76n^6+76n^5+56n^4-56n^3-10n^2+10n)}{12}$$
$$=\frac{2n(n+1)(6n^9+27n^8+28n^7-28n^6-38n^5+38n^4+28n^3-28n^2-5n+5)}{12}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3-2n^2-15n+5)}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)(n^2+n-1)(3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5)}{6}.$$

Следовательно,

$$S_n=1^{10}+\cdots+n^{10}=$$
$$\frac{n(n+1)(2n+1)(n^2+n-1)(3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5)}{66}.$$

II. Пропорциональный закон распределения.

Известные дискретные случайные величины задаются на конечном множестве натуральных чисел (равномерный, биномиальный, гипергеометрический законы распределения) или на бесконечном множестве таковых (распределение Пуассона, геометрическое распределение, распределение Паскаля) (см. [2]).

В курсе теории вероятностей предлагается после общепринятого рассмотрения равномерного закона распределения введение нового пропорционального закона распределения, как это и было сделано в работе [6]. А именно, всем целым числам от 1 до n присваиваем вероятности их выбора, пропорциональные этим числам. Тогда получаем дискретную случайную величину $P\{X=m|m=1,2,\dots,n\}=\frac{2}{n(n+1)}\times m$. Ее основные характеристики – математическое ожидание и дисперсия равны: $M[X]=\frac{2n+1}{3}$ и $D[X]=\frac{(n-1)(n+2)}{18}$.

III. Пропорциональный закон распределения для треугольных чисел.

Теперь всем треугольным числам от 1 до $\frac{n(n+1)}{2}$ присваиваем вероятности их выбора, пропорциональные этим числам. Получаем дискретную случайную величину: $P\left\{X=\frac{m(m+1)}{2}\middle| m=1,2,\dots,n\right\}=\frac{m(m+1)}{2}\times k$. Тогда $P\{X=1\}=1\times k, P\{X=2\}=3\times k, P\{X=3\}=6\times k,\dots,P\{X=n\}=\frac{n(n+1)}{2}\times k$. Следовательно, при помощи формулы суммы треугольных чисел [5] находим: $1=1\times k+3\times k+6\times k+\dots+\frac{n(n+1)}{2}\times k=\left(1+3+6+\dots+\frac{n(n+1)}{2}\right)\times k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\times k$. Отсюда выражаем параметр $k=\frac{6}{n(n+1)(n+2)}$ и получаем такой закон распределения:

$$P\left\{X=\frac{m(m+1)}{2}\middle| m=1,2,\dots,n\right\}=\frac{6}{n(n+1)(n+2)}\times\frac{m(m+1)}{2}.$$

Найдем основные характеристики нового дискретного закона распределения.

1. Математическое ожидание

С учетом формул суммы квадратов и суммы кубов первых n натуральных чисел [5] имеем: $M[X]=\sum_{i=1}^{n}x_i\times p_i=1\times\frac{3}{n(n+1)(n+2)}\times 1\times 2+2\times\frac{3}{n(n+1)(n+2)}\times 2\times 3+\dots+n\times\frac{3}{n(n+1)(n+2)}\times n\times(n+1)=\frac{3}{n(n+1)(n+2)}\times\left((1^3+2^3+\dots+n^3)+(1^2+2^2+\dots+n^2)\right)=\frac{3}{n(n+1)(n+2)}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)=\frac{3}{n(n+1)(n+2)}\times\frac{n(n+1)}{12}\times\left(3n(n+1)+2(2n+1)\right)=\frac{3n^2+7n+2}{4(n+2)}=\frac{3n^2+6n+n+2}{4(n+2)}=\frac{3n(n+2)+(n+2)}{4(n+2)}=\frac{(n+2)(3n+1)}{4(n+2)}=\frac{3n+1}{4}$.

2. Дисперсия

Как известно, $D[X]=M[X^2]-M^2[X]$, где в нашем случае $M[X]=\frac{3n+1}{4}$.

Тогда с учетом формул суммы кубов и суммы четвертых степеней первых n натуральных чисел [5] получаем: $M[X^2]=$

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times p_i = 1^2 \times \frac{3}{n(n+1)(n+2)} \times 1 \times 2 + 2^2 \times \frac{3}{n(n+1)(n+2)} \times 2 \times 3 + \cdots + n^2 \times \frac{3}{n(n+1)(n+2)} \times n \times (n+1) = \frac{3}{n(n+1)(n+2)} \times \left((1^4 + 2^4 + \cdots + n^4) + (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3)\right) = \frac{3}{n(n+1)(n+2)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} + \frac{n^2(n+1)^2}{4}\right) = \frac{3}{n(n+1)(n+2)} \times \frac{n(n+1)}{60} \times (2(2n+1)(3n^2+3n-1) + 15n(n+1)) = \frac{12n^3+33n^2+17n-2}{20(n+2)}$.

В итоге

$$D[X] = \frac{12n^3 + 33n^2 + 17n - 2}{20(n+2)} - \left(\frac{3n+1}{4}\right)^2$$

$$= \frac{48n^3 + 132n^2 + 68n - 8 - 45n^3 - 30n^2 - 5n - 90n^2 - 60n - 10}{80(n+2)}$$

$$= \frac{3n^3 + 12n^2 + 3n - 18}{80(n+2)} = \frac{3(n^3 + 2n^2 + 2n^2 + 4n - 3n - 6)}{80(n+2)}$$

$$= \frac{3(n+2)(n^2+2n-3)}{80(n+2)} = \frac{3(n-1)(n+3)}{80}.$$

Библиографический список

1. Афанасьев В.В. Геометрические интерпретации некоторых конечных сумм // Математика в школе. 1997. № 1. С. 86-87.
2. Афанасьев В.В. Теория вероятностей. М: Владос. 2007. 350 с.
3. Афанасьев В.В., Алексеев В.Н., Тихомиров С.А. Наглядная математика. Ярославль: ЯГПУ. 2012. 171 с.
4. Афанасьев В.В., Алексеев В.Н., Тихомиров С.А. Наглядная математика: часть 2. Ярославль: ЯГПУ. 2013. 190 с.
5. Афанасьев В.В., Тихомиров С.А. Удивительный мир чисел. Latvia. Riga: LAP Lambert Academic Publishing. KS OmniScriptum Publishing. 2021. 72 с.
6. Афанасьев В.В., Тихомиров С.А. Пропорциональный закон распределения // Математика в школе. 2024. №6. С. 37-41.

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 512.558

Е.М. Вечтомов

К теории полурешеток

В статье приведены новые результаты автора о полурешетках. Рассматриваются общие свойства полурешеток. Показано, что при исследовании полурешеток целесообразно использовать оба (эквивалентных) подхода – алгебраический и порядковый. Приведено описание следующих классов полурешеток: абсолютных ретрактов в классе всех полурешеток (теорема 1); полурешеток, все подполурешетки которых являются их ретрактами (теорема 2); полурешеток, все конгруэнции на которых порождаются ретракциями полурешеток (теорема 3).

Ключевые слова: *полурешетка, верхняя полурешетка, ретракт, ретракция.*

E. M. Vechtomov

On theory of semilattices

The article presents the author's new results on semilattices. There he considers general properties of semilattices and shows that when studying semilattices it is advisable to use both algebraic and ordinal approaches (equivalent). There are following classes of semilattices described in the paper: absolute retracts in the class of all semilattices (Theorem 1); semilattices all subsemilattices of which are their retracts (Theorem 2); semilattices all congruences on which are generated by retractions of semilattices (Theorem 3).

Key words: *semilattices, upper semilattice, retract retraction.*

Исходные понятия

Полурешетки имеют алгебраическую и порядковую природу [2; 3]. *Полурешеткой* называется идемпотентная коммутативная полугруппа $\langle A, + \rangle$, в аддитивных обозначениях. В порядковом смысле под *полурешеткой* понимается *верхняя полурешетка*, то есть упорядоченное множество $\langle A, \leq \rangle$, любые два элемента a, b

которого имеют в A точную верхнюю грань $\sup\{a, b\}$. Задав на полурешетке $\langle A, +\rangle$ отношение порядка $\leq$ по правилу: $a \leq b$ означает $a+b=b$ ($\forall a, b \in A$), получим (верхнюю) полурешетку $\langle A, \leq\rangle$, в которой тождественно $\sup\{a, b\}=a+b$. Если же на полурешетке $\langle A, \leq\rangle$ положить $a+b=\sup\{a, b\}$ для всех $a, b \in A$, то получится полурешетка $\langle A, +\rangle$. Тем самым, имеем два эквивалентных определения полурешетки [3, с. 23-24].

Решетка – это алгебраическая структура $\langle A, +, \cdot\rangle$, такая, что $\langle A, +\rangle$ и $\langle A, \cdot\rangle$ – полурешетки и операции сложения $+$ и умножения $\cdot$ связаны тождествами поглощения $x+xy=x$ и $x(x+y)=x$. При порядковом подходе *решеткой* называется полурешетка $\langle A, \leq\rangle$, в которой для любых элементов a, b существует также точная нижняя грань $\inf\{a, b\}$. Эти определения решетки также равносильны [3, с. 18–22]. Решетка с тождеством $x(y+z)=xy+xz$ называется *дистрибутивной*. Упорядоченное множество называется *полной решеткой*, если любое его непустое подмножество имеет точные верхнюю и нижнюю грани.

Полурешетки удобно рассматривать как алгебраические системы $\langle A, +, \leq\rangle$ с одной бинарной алгебраической операцией $+$ и одним бинарным отношением $\leq$, удовлетворяющим указанным выше условиям и взаимосвязям.

Общие свойства

Мы будем свободно пользоваться общеалгебраическими и порядковыми понятиями и обозначениями.

Для непустых подмножеств X, Y полурешетки A положим $X+Y=\{x+y: x \in X, y \in Y\}$; при этом пишем $x+Y$, если $X=\{x\}$. Ясно, что $x+A=[x)=\{a \in A: a \geq x\}$ – *верхний конус элемента* x. Подмножество $(x]=\{a \in A: a \leq x\}$ называется *нижним конусом элемента* $x \in A$.

Непустое подмножество B полурешетки A называется:

идеалом (*главным идеалом*), если $B+A \subseteq B$ ($B=b+A$ для некоторого элемента $b \in B$);

простым идеалом, если B – собственный идеал ($B \neq A$) и $A \setminus B$ – подполурешетка;

фильтром (*главным фильтром*), если B – подполурешетка и $(b] \subseteq B$ для любого элемента $b \in B$ ($B=(b]$ для некоторого $b \in B$).

Замечание 1. Понятие идеала полурешетки A понимается в полугрупповом смысле: идеал определяется как идеал полугруппы $\langle A, + \rangle$.

Идеалы в полурешетках обладают рядом специфических свойств. Так, объединение любого непустого множества идеалов (простых идеалов) произвольной полурешетки A также будет ее идеалом (либо простым идеалом, либо A). При этом заметим, что непустое подмножество B полурешетки A является ее простым идеалом тогда и только тогда, когда $A \backslash B$ будет фильтром в A. Любой идеал J полурешетки A индуцирует на ней *рисовскую конгруэнцию*, классами которой являются J и одноэлементные множества $\{a\}$ по всем элементам $a \in A \backslash J$.

Для любого элемента a полурешетки A положим:

$$A_a = \{x \in A : \neg(x \leq a)\} = A \backslash (a].$$

Легко видеть, что A_a – простой идеал полурешетки A для всякого ненаибольшего элемента $a \in A$. Кроме того, равенство $A_a = \varnothing$ эквивалентно тому, что a – наибольший элемент полурешетки A.

Если $a \neq b$ – элементы полурешетки A, то $\neg(a \leq b)$ или $\neg(b \leq a)$, стало быть, в первом случае элементы a и b разделяет простой идеал A_a, во втором случае – простой идеал A_b. Каждый простой идеал полурешетки индуцирует двухклассовую конгруэнцию на ней. Следовательно, подпрямо неразложимыми полурешетками в классе всех полурешеток служат в точности двухэлементные полурешетки (двухэлементные цепи). Поэтому каждая неодноэлементная полурешетка являются подпрямым произведением непустого семейства двухэлементных цепей, а многообразие всех полурешеток порождается двухэлементной цепью. Это показывает, что полурешетки в чем-то близки к дистрибутивным решеткам.

Полурешетки можно рассматривать как идемпотентные моно-полукольца, то есть полукольца с совпадающими полурешеточными операциями сложения и умножения. Напомним, что *полукольцом* называется алгебраическая структура с коммутативно-ассоциативной операцией сложения и ассоциативной операцией умножения, дистрибутивной относительно сложения с

обеих сторон. Полурешетки обладают всеми свойствами полуколец с полурешеточным умножением [1].

Множество Spec A всех простых идеалов неодноэлементной полурешетки A с топологией Стоуна – Зарисского называется ее *простым спектром* [2, с. 166; 6, с. 128]. Если множество Max A всех максимальных идеалов полурешетки A не пусто, то оно будет подпространством топологического пространства Spec A, называемым *максимальным спектром* полурешетки A.

Имеют место следующие утверждения.

Предложение 1. *Собственные идеалы всякой полурешетки A являются пересечениями идеалов вида A_a ($a \in A$).*

Предложение 2. *Максимальные идеалы любой полурешетки A совпадают с идеалами A_a по всем минимальным элементам $a \in A$.*

Предложение 3. *Максимальный спектр любой полурешетки является дискретным пространством, если он не пустой.*

Напомним, что упорядоченное множество называется *условно полным снизу*, если любое его ограниченное снизу непустое подмножество обладает точной нижней гранью.

Предложение 4. *В произвольной полурешетке A объединения идеалов вида A_a при $a \in A$, не равные A, имеют такой же вид тогда и только тогда, когда A – условно полное снизу упорядоченное множество.*

Предложение 5. *Для того чтобы простой идеал P полурешетки A с 1 был минимальным простым идеалом, необходимо и достаточно, чтобы $P=\{a \in A: \exists b \in A | P\ a+b=1\}$.*

Напомним, что упорядоченное множество удовлетворяет *условию максимальности*, если любое его непустое подмножество имеет хотя бы один максимальный элемент.

Предложение 6. *Все простые идеалы полурешетки A с 1 имеют вид A_a при $a \in A$ тогда и только тогда, когда упорядоченное множество A удовлетворяет условию максимальности.*

В частности, в конечных полурешетках A простые идеалы совпадают с идеалами A_a по всем ненаибольшим элементам $a \in A$.

В терминах простого спектра полурешеток можно описать некоторые из их возможных свойств.

Предложение 7. *Для произвольной неодноэлементной полурешетки A равносильны следующие утверждения:*

1) *все простые идеалы в A являются максимальными;*

2) *Spec A – дискретное пространство;*

3) *полурешетка A обладает наибольшим элементом и все ее ненаибольшие элементы – минимальные.*

Для изучения полурешеток может быть применен метод пучковых (функциональных) представлений [6].

Замечание 2. При исследовании идеалов полурешеток зачастую естественнее (и привычнее) рассматривать двойственный подход к полурешеткам – как нижним полурешеткам в мультипликативной терминологии: $x \leq y \Leftrightarrow xy=x$, $xy=\inf\{x, y\}$.

Полурешетки с ретрактными условиями

Опишем три класса полурешеток, удовлетворяющих некоторым ретрактным условиям.

Подполурешетка B полурешетки A называется ее *ретрактом*, если существует гомоморфизм e: $A \to B$, для которого $e(b)=b$ при любых $b \in B$. Идемпотентный эндоморфизм e полурешетки A называется ее *ретракцией*.

Полурешетка A называется *абсолютным ретрактом*, если она является ретрактом любой полурешетки, содержащей A в качестве подполурешетки.

Теорема 1. *Полурешетка будет абсолютным ретрактом в классе всех полурешеток тогда и только тогда, когда она является полной решеткой.*

Следствие 1. *Конечная полурешетка будет абсолютным ретрактом тогда и только тогда, когда она имеет наименьший элемент.*

Цепь – это линейно упорядоченное множество. Цепи, изоморфные подцепям цепи всех целых чисел с естественным порядком, называются *дискретными*.

Скажем, что полурешетка является *полурешеткой с ретрактами*, если все подполурешетки в ней суть ее ретракты.

Теорема 2. *Для того чтобы полурешетка являлась полурешеткой с ретрактами, необходимо и достаточно, чтобы верхние конусы всех ее элементов были цепями и все ее цепи были дискретными.*

Следствие 2 [5, теорема 2]. *Все подцепи цепи являются ее ретрактами тогда и только тогда, когда она дискретная.*

Каждое конечное упорядоченное множество можно изобразить в виде *диаграммы Хассе* [2, с. 72]. *Деревом* называется связный неориентированный граф без циклов.

Следствие 3. *Для конечной полурешетки A эквивалентны следующие условия:*

1) *A – полурешетка с ретрактами;*

2) *верхние конусы элементов в A являются цепями;*

3) *диаграмма Хассе полурешетки A, рассматриваемая как неориентированный граф, является деревом.*

Замечание 2. Класс всех полурешеток с ретрактами замкнут относительно взятия подполурешеток и гомоморфных образов, но не замкнут относительно прямых произведений.

Для ретракции e полурешетки A определим конгруэнцию $\rho(e)$ на A:

$$x\rho(e)y \Leftrightarrow e(x)=e(y) \text{ для любых } x, y\in A.$$

Конгруэнцию ρ на полурешетке A назовем *ретрактной*, если $\rho=\rho(e)$ для некоторой ретракции e полурешетки A. Полурешетку будем называть *ретрактной*, если все конгруэнции на ней ретрактные, в противном случае – *неретрактной*.

Легко видеть, что ретрактность конгруэнции ρ на полурешетке A равносильна существованию подполурешетки в A, пресекающейся с каждым классом конгруэнции ρ ровно по одному элементу.

Отметим следующее полезное достаточное условие неретрактности полурешетки A: если A содержит пятиэлементное подмножество $\{a, b, c, d, m\}$, такое, что $a+b=c$ и $c+d=m$, то A – неретрактная полурешетка.

Элемент m полурешетки A называется *разложимым*, если $m=x+y$ для некоторых несравнимых элементов $x, y\in A$. Полурешетку A назовем *специальной*, если A имеет наибольший элемент

m, такой, что m разложимый и $x+y=m$ для любых несравнимых элементов $x, y \in A$.

Любая специальная полурешетка имеет ровно один разложимый элемент. Полурешетки без разложимых элементов являются цепями. Пентагон и диамант являются специальными полурешетками. Специальные полурешетки и цепи являются ретрактными полурешетками.

Теорема 3. *Ретрактные полурешетки суть в точности ординальные суммы специальных полурешеток и цепей.*

Понятие ординальной суммы упорядоченных множеств см. в [4, с. 15].

Замечание 4. Класс всех ретрактных полурешеток замкнут относительно взятия подполурешеток, гомоморфных образов и ординальных сумм. Но прямое произведение двух неодноэлементных полурешеток будет ретрактной полурешеткой тогда и только тогда, когда сомножители являются двухэлементными цепями.

Замечание 5. Как показывают результаты данной статьи, полурешетки на самом деле относятся к теории упорядоченных алгебраических систем, причем, многие факты выражаются на порядковом языке. В структурной теории полугрупп полурешетки служат своеобразными «кирпичиками», к которым можно пытаться свести изучение, скажем, идемпотентных полугрупп (связок). Заметим, что в решетке всех подмногообразий многообразия идемпотентных полугрупп полурешетки (коммутативные связки) образуют один из трех ее атомов. Отметим также, что для любого натурального числа n всякая полурешетка с n образующими имеет не более 2^n-1 элементов, являясь фактор-полурешеткой свободной полурешетки с n свободными образующими, которая, очевидно, изоморфна полурешетке всех непустых подмножеств n-элементного множества с операцией объединения множеств.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00117.

Библиографический список

1. Вечтомов Е.М. Полукольца с идемпотентным умножением: учебное пособие для вузов / Е.М. Вечтомов, А.А. Петров. СПб: Лань, 2022. 180 с.

2. Вечтомов Е.М. Упорядоченные множества и решетки: учебное пособие для вузов / Е.М. Вечтомов, Д.В. Широков. СПб.: Лань, 2024. 248 с.

3. Гретцер Г. Общая теория решеток / перевод с английского. М.: Мир, 1982. 456 с.

4. Скорняков Л.А. Элементы теории структур / 2-е изд. М.: Наука, 1982. 160 с.

5. Фофанова Т.С. О ретрактах структуры // Математические заметки. 1970. Т. 7. Вып. 6. С. 687-692.

6. Чермных В.В. Функциональные представления полуколец // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17. Вып. 3. С. 111-227.

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 37.018.46

Н.Д. Подуфалов

О повышении качества математического и естественно-научного образования и оптимизации содержания общего образования

Статья подготовлена на основе результатов анализа уровня остаточных знаний школьного курса математики, проводившегося в течение 2021-2024 гг. на базе Красноярского математического центра Сибирского федерального университета с участием Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева, а также выступления на совместном заседании Научного совета Российской академии образования по развитию математического и естественно-научного образования и Методологического семинара Московского педагогического государственного университета в феврале текущего года, посвященном задачам повышения качества математического и естественнонаучного школьного образования, и ряда выступлений на Международной научно-практической интернет-конференции «Актуальные проблемы методики обучения информатике и математике в современной школе» ежегодно проводимой Московским педагогическим государственным университетом.

В статье рассматриваются вопросы повышения уровня и качества знаний учащихся «массовой» (не специализированной) общеобразовательной школы, т.е. задачи модернизации «массового» общего образования.

Ключевые слова: *качество, математическое и естественно-научное образование, оптимизация, содержание, общее образование.*

N.D. Podufalov

On Improving the Quality of Mathematical and Science Education and Optimizing the Content of General Education

This article is based on the results of an analysis of the level of retained knowledge from the school mathematics course, conducted from 2021 to 2024 at the Krasnoyarsk Mathematical Center of Siberian Federal University with the participation of the V.P. Astafiev Krasnoyarsk State Pedagogical University. It also incorporates materials from a presentation at the joint meeting of the Scientific Council of the Russian Academy of Education for the Development of Mathematical and Science Education and the Methodological Seminar of Moscow Pedagogical State University in February of this year, dedicated to the tasks of improving the quality of school mathematical and science education, as well as a number of presentations at the International Scientific-Practical Online Conference «Current Issues in the Methodology of Teaching Informatics and Mathematics in the Modern School», held annually by Moscow Pedagogical State University.

The article examines issues related to raising the level and quality of knowledge among students in "comprehensive" (non-specialized) general education schools, i.e., the tasks of modernizing «mass» general education.

Keywords: *quality, mathematical and science education, optimization, content, general education.*

Ситуация с качеством математических и естественно-научных знаний учащихся специализированных классов, классов с углубленным изучением этих предметов намного лучше – это подтверждается ежегодными высокими результатами участия российских школьных команд на различных международных соревнованиях по соответствующим направлениям. Правда надо отметить и существенный вклад университетов, на базе которых проводиться подготовка команд перед соревнованиями, в частности МГУ.

О том, что сейчас накопилось достаточно много проблем с качеством школьной математической и естественнонаучной подготовки свидетельствует то, что эти проблемы уже неоднократно обозначались в выступлениях Президента России, в частности, было его поручение о принятии мер по повышению уровня преподавания школьной математики и информатики, а затем был

утвержден Правительством России «Комплексный план мероприятий по повышению качества математического и естественно-научного образования до 2030 года».

Поскольку проблемы с преподаванием школьных курсов физики, химии и биологии, во многом, аналогичны проблемам с преподаванием математики, я подробно остановлюсь в докладе только на последних проблемах – проблемах совершенствования математического образования.

Вместе с этим, вначале отмечу, что искать более эффективные варианты организации изучения школьных дисциплин надо в комплексе, сразу для всех учебных дисциплин общего образования в связи со значительной учебной перегрузкой и учителей и обучающихся и общей ограниченностью учебного времени.

Более того, постоянно повышается научно-технический и технологический уровень производственных процессов, что порождает более высокие требования к уровню инженерных знаний и усложнению образовательных программ высшей школы. В связи с этим, а также с обострением международной обстановки, наибольшее внимание сейчас уделяется повышению уровня и качества инженерно-технического и технологического образования. Причем, важное значение имеет подготовка не только инженеров – разработчиков новых технологий (этот процесс, в первую очередь, обеспечивается развитием продвинутого, специализированного школьного образования), но и большого количества высококвалифицированных инженеров и технологов, способных реализовать эти технологии, технические разработки в реальном производстве. А подготовка «массового» инженера базируется на массовой общеобразовательной школе.

Как Вы знаете, в соответствии с указом Президента, активизируются процессы модернизации высшего образования. В ближайшее время завершается эксперимент в шести ведущих университетах по отработке моделей новой структуры высшего профессионального образования и будут внесены соответствующие изменения в закон об образовании – будет утверждена новая структура высшего образования и новые сроки обучения.

Естественно, что модернизация высшей школы должна сопровождаться соответствующими мерами в области общего образования. К сожалению, Минпросвещения России пока не предпринимает активных шагов в этом направлении. Более ранние попытки начинать решение этой проблемы в общеобразовательной школе, например, за счет расширения содержания разделов высшей математики в школьном курсе, в условиях существенно ограниченного учебного времени на их изучение, в массовой школе не дают нужного эффекта.

Несмотря на то, что сейчас одной из важнейших общегосударственных задач является задача достижения Россией технологического лидерства, нельзя отодвигать на второй план и задачи гуманитарного и воспитательного характера.

Должен быть найден разумный баланс между предметными циклами и гуманитарной направленности, и математической, и естественно-научной в рамках весьма ограниченного учебного времени. При этом нельзя упускать вопросы формирования у молодого поколения научного мировоззрения и важных для развития российского государства гражданских позиций.

Одной из центральных проблем, без решения которой невозможна полномасштабная реализация правительственного Комплексного плана, отмеченного выше, является проблема выбора оптимального содержания общего образования, в первую очередь, школьных курсов математики и естественно-научных дисциплин. Важно учитывать, что поиск оптимальных решений предстоит осуществлять в условиях значительной предметной насыщенности образовательных школьных программ в целом.

В этом и заключается вся сложность решения задач, стоящих перед системой общего образования.

Рассмотрим теперь отмеченные выше задачи с учетом тематики нашей конференции, то есть сконцентрируемся на школьной математике.

Прежде всего, о наиболее сложной задаче – задачи модернизации содержания школьного курса математики. Например, на протяжении длительного периода времени не удается выработать консолидированное мнение ученых-математиков, учителей мате-

матики и преподавателей вузовских курсов математики по вопросам оптимизации перечня разделов высшей математики и их содержания, включаемых в учебные программы общего образования, а также и модернизации содержания разделов элементарной математики.

Расширение содержания разделов высшей математики в школьном курсе, начатое в 60-ые годы прошлого века при проведении системной реформы математического образования, позволило повысить уровень «продвинутого» математического образования, но привело к ряду негативных последствий в «массовом» общем образовании – в условиях сокращения учебного времени, отводимого на изучении математических и естественнонаучных предметов, а также в условиях общей учебной перегрузки учеников и учителей и снижения интересов молодого поколения к точным наукам, заметно снизился уровень знаний выпускников «массовой» школы в области элементарной математики, и показатели качества знаний разделов высшей математики также не могут нас удовлетворять. Эти тенденции подтверждает и анализ уровня остаточных знаний школьного курса математики, проводимого на базе Красноярского математического центра.

Результаты экспертных оценок по этим вопросам, как правило, зависят от личной позиции экспертов, а их позиции в ряде случаев значительно различаются и не удается выработать консолидированные подходы к решению проблемы оптимизации содержания школьного курса математики. Поэтому, без проведения соответствующих экспериментальных исследований невозможно обеспечить научную обоснованность и объективность принимаемых решений по этим вопросам. Также учебно-методическое обеспечение преподавания новых разделов математики должно проходить необходимую апробацию в «массовой» школе.

Многие учителя и вузовских преподавателей математики считают, что школьный курс математики в массовой (не специализированной) школе перегружен элементами высшей математики, это подтверждают и результаты наших исследований, проводимых в СФУ.

Но поскольку единого мнения у математиков по этому поводу нет, то и у Минпросвещения России нет оснований для внесения изменений в курс математики. К сожалению, пока преобладают общие соображения о том, что школьные математические и естественнонаучные курсы должны полнее освещать современные достижения науки, а о том, что при этом надо учитывать психофизиологические возрастные возможности молодого поколения в освоении знаний достаточно высокого уровня абстрактности, а также объем учебного времени, отводимого на их изучение, как-то забывается, особенно представителями фундаментальной науки, не участвующими в обучении школьников.

Ещё раз подчеркну, что речь идет о массовой школе.

На мой взгляд, сейчас на первый план (но не впервые) выдвигается задача проведения глубинного анализа содержания всего школьного образования и выбора его базисных элементов, которые можно было бы качественно освоить в массовой общеобразовательной школе и, овладев которыми, большинство школьников могло бы в дальнейшем эффективно продолжить профессиональное образование или получить рабочую профессию.

При этом важно расширять возможности дифференциации образования – развивать профильное обучение, обучение «продвинутых и одарённых» детей и подростков по углублённым программам для того, чтобы заинтересованные и желающие активно использовать своё личное время для профессионального становления школьники имели возможность получить более глубокие знания, навыки и умения в соответствии со своими способностями и интересами и с учётом задач общественного развития.

Вместе с тем, негативная практика внесения значительных изменений в содержание и методики преподавания школьного курса математики без предварительного глубокого научно-методической обоснования и широкой экспериментальной апробации в школах, продолжается. Например, недавнее введение в государственный стандарт общего образования и в учебные школьные программы разделов по теории вероятностей и математической статистики проведено без предварительной широкой экспериментальной апробации учебно-методического обеспечения и методик преподавания в «массовой» школе.

Причем, это решение было принято в условиях значительных сомнений многих специалистов в области математики и учителей по поводу самой возможности эффективного освоения «средним школьником» данных разделов математики. Попытки создать адаптированный курс тоже вызывают много вопросов – нельзя преподавать математику «на пальцах». Кстати, сказать, вопросы введения в школьный курс раздела по теории вероятностей и математической статистики несколько раз обсуждались на заседаниях объединенного научно-методического семинара «Математика и информатика в средней и высшей школе», действующего на базе МГУ (руководятели: академик А.Л. Семенов и профессор А.В. Боровских) и участники так не пришли к консенсусу, хотя по другим вопросам, рассматриваемым на семинаре, как правило нам удается выработать общее мнение.

Вопросы модернизации содержания школьного математического образования являются системными и комплексными, а результаты их разрешения будут значительным образом влиять и на личные судьбы представителей молодого поколения, и на процессы научного и научно-технического развития всей страны. По-видимому, эти факторы стали основной причиной того, что данная проблема регулярно обсуждается в научных и образовательных кулуарах, на различных конференциях, но только сейчас задача её решения обозначена на уровне руководства страны.

Можно констатировать, что успешность решения задач, поставленных в Комплексном плане, в первую очередь, «находится в руках» ученых-математиков, преподавателей и учителей математики. Она определяется успешностью выработки консолидированных педагогически обоснованных предложений по решению задачи модернизации содержания школьного курса математики.

Одним из конструктивных и научно-обоснованных подходов к решению обсуждаемой проблемы может стать следующий: провести в «массовой» школе одновременное представительное и объективное тестирование по всем разделам высшей и элементарной математики, включенным в школьный курс. По итогам анализа, по каждому разделу, по которому итоги тестирования будут неудовлетворительными, принять решение либо об исключении этого раздела из школьного курса, либо о выделении на изучение

этого раздела необходимого учебного времени, а также о переработке учебно-методического обеспечения с последующей его апробацией в «массовой» школе. Для достижения объективности и достоверности такого тестирования целесообразно использовать опыт, отработанный в ходе проведения ЕГЭ.

Может это предложение выглядит слишком радикальным, но у нас пока нет объективной доказательной базы для принятия научно-обоснованных решений по поводу содержания школьного курса математики, а принимать решения только на основе субъективных позиций даже, ведущих ученых и преподавателей опасно – мы уже не раз в этом убеждались.

Учитывая, что уровень знаний по ряду разделов элементарной математики также низкий, необходимо провести анализ и возможную корректировку содержания курса элементарной математики и после этого определить объемы учебного времени, необходимого для изучения данных разделов, которые позволят «среднему» учителю сформировать нужный уровень знаний и умений у «среднего» ученика.

Как я уже говорил, анализ итогов тестирования уровня остаточных знаний по математике, проводимого уже несколько лет на базе Красноярского математического центра, подтверждает вышесказанное и показывает, что необходимо оставить в школьной программе разделы, связанные с изучением производной (возможно, уточнив объем учебного времени), а по остальным разделам высшей математики принять одно из решений, указанных выше.

Учитывая значительное расхождение в подходах различных специалистов в области математики к решению этих вопросов, целесообразно воспользоваться опытом решения таких проблем в советский период – когда на высоком уровне создавалась представительная и компетентная комиссия, которая должна была выработать предложения по решению стоящих задач и принятию необходимых управленческих решений.

Так было при проведении системной реформы математического образования. Как показал опыт проведенной реформы – это не идеальный способ решения стоящих задач, поскольку возможны ошибочные решения, но всё же – это продвижение вперед,

в ходе которого могут выявляться и устраняться возможные ошибки.

Сейчас мы практически «топчемся на месте», реализуя частные решения, которые не могут существенно изменить ситуацию. Наглядный пример – выполнение поручения Президента России, о необходимости повышения качества изучения математики и информатики в средней школе, которое я уже упоминал. С большим запозданием была создана рабочая группа и одним из конкретных предложений было разрешить директору школы использовать на эти цели один дополнительный учебный час. В условиях большой перегрузки учебного процесса – такое решение неэффективно.

Отмечу, что и формирование рабочей группы по проблемам реализации Комплексного плана тоже затянулось до сих пор, хотя уже прошло больше полгода.

После решения задачи оптимизации содержания, дальнейшая работа будет состоять уже в поиске и выборе наиболее эффективных методов и методик освоения модернизированного содержания. Для повышения эффективности этой работы уже нет необходимости в принятии каких-либо решений высокого государственного уровня, а требуется моральное и материальное стимулирование обществом и государством научной, учебно-методической и инновационной деятельности ученых, преподавателей и учителей, постоянная общественная и государственная поддержка их в решении задачи поиска и реализации новых дидактических решений и инноваций, и, соответственно, существенное повышение статуса и роли Учителя в российском обществе.

В связи с тем, что практически на всех научных и околонаучных мероприятиях поднимаются проблемы, связанные с ролью ЕГЭ, хочу также прокомментировать и их. До начала рыночных и социальных реформ углубленное изучение отдельных предметов школьного курса, в основном, связывалось с повышением конкурентоспособности выпускника школы при поступлении в выбранный вуз и с обеспечением большей «комфортности» его обучения в этом вузе. В годы реформ эта деятельность практически свелась к подготовке обучающихся к сдаче ЕГЭ и замены принципа «глубины знаний» принципом «умения хорошо решать определенный

круг учебных задач». Негативные последствия этого я думаю в нашей аудитории перечислять нет необходимости.

На мой взгляд, ликвидировать ЕГЭ нецелесообразно – эта система оценки качества знаний хорошо технологически отработана, разработана обширная система тестовых заданий. Потрачено много усилий и накоплен большой опыт. Представляется целесообразным «развернуть» систему углубленной подготовки от подготовки к сдаче ЕГЭ к более глубокому и системному изучению соответствующих учебных предметов, а ЕГЭ использовать в качестве одного из индикаторов эффективности образовательного процесса. Таким образом, надо устранить прямую связь результатов сдачи ЕГЭ с поступлением в вузы и предоставить вузам возможность самостоятельно определять порядок вступительных испытаний, естественно, с учетом соответствующих требований законодательства.

Не вызывает сомнений, что в решении задач модернизации содержания разделов математики, включаемых в программу общеобразовательной школы, могут и должны сыграть важную роль математические центры России, созданные Минобрнауки России – эта проблематика обсуждалась на последней ежегодной конференции этих центров, прошедшей недавно на базе Красноярского математического центра СФУ.

На мой взгляд одним из общих направлений деятельности классических и педагогических университетов и математических центров может стать разработка и реализация научного проекта (возможно, в рамках одного из Национальных проектов), направленного на регулярное проведение мониторинговых исследований качества школьного курса математики в старших классах общеобразовательных школ, а также среди абитуриентов и первокурсников. Целесообразно на основе общей методики и общей системы тестов регулярно проводить тестирование «остаточных» знаний и умений по всем разделам школьной математики (возможно и информатики) для создания базы данных, необходимой для принятия педагогически обоснованных решений по необходимой корректировке содержания школьного курса математики.

В последние годы такие решения принимаются чаще всего не на основе объективных данных, а исходя из мнения авторитетных

ученых-математиков и преподавателей, а эти мнения зачастую оказываются противоположными.

Определенный задел по проведению таких тестирований уже имеется в Красноярском математическом центре, в котором я осуществляю научное руководство этим направление исследований. Кто интересуются деталями, могут ознакомиться с нашими основными публикациями. Их перечень приложен к моему докладу. Мы в КМЦ планируем при дальнейшем проведении тестирований попытаться детализировать тесты для более тонкого анализа наиболее сложных для понимания школьников разделов и тем курса математики, в первую очередь, связанных с понятиями непрерывности, производной, предела и ряда других.

Такой анализ важен для выбора базового содержания разделов элементарной и высшей математики, которое должно быть освоено учащимися «массовой школы» с учетом уровня их возрастного психофизиологического развития, а также требований к их знаниям, умениям и навыкам в области математики при дальнейшем получении профессионального образования.

Понятно, что и разработка, и реализация такого общего научного проекта потребует не только консолидации усилий специалистов в области математики, но также привлечения в необходимых случаях специалистов в области психологии и психофизиологии, занимающихся проблематикой возрастного развития молодого поколения. Здесь могут оказать помощь ведущие педагогические университеты. Учитывая большую учебную нагрузку и учителей, и учеников, нужно будет совместно с Минпросвещения России определить технологию проведения таких тестирований, вписывающуюся в общий контекст контрольных мероприятий, проводимых в школах.

Нет необходимости доказывать то, что процессы реформирования общего образования должны сопровождаться соответствующими изменениями в подготовке учительских кадров. Все разработки и рекомендации педагогической науки и пожелания ученых-математиков окажутся бесплодными, если не будут предприняты меры по подготовке необходимого количества любящих

свое дело высокопрофессиональных учителей математики, а статус учителя в нашем обществе будет выше статуса любой другой профессии.

Библиографический список

1. Дураков Б.К., Подуфалов Н.Д. Математическое образование в контексте методологических проблем развития российской системы образования // Педагогика. 2018. № 7. С. 3-12.

2. Подуфалов Н.Д. О проблемах реализации концепции развития математического образования. Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы VII Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. Красноярск, 14-15 ноября 2018 г. / отв. ред. В.Р. Майер. Красноярский гос. пед. ун-т им. Астафьева. Красноярск. 2018.

3. Подуфалов Н.Д. О развитии методологии школьного математического образования // Педагогика. 2019. № 5. С. 5-17.

4. Дураков Б.К., Кравцова О.В., Майер В.Р., Подуфалов Н.Д. О содержании школьного математического образования и разработке учебников нового поколения по математике // Известия РАО. 2021. № 3(55), С.105-119.

5. Дураков Б.К., Кравцова О.В., Майер В.Р., Подуфалов Н.Д., Семенова Д.В. О содержании школьного математического образования и тестировании остаточных знаний по математике // Педагогика. 2022. № 5. С. 57-68.

6. Дураков Б.К., Кравцова О.В., Майер В.Р., Подуфалов Н.Д., Семенова Д.В., Шевелева И.В. О тестировании остаточных знаний по математике в 2022 году // Педагогика. 2023, № 1, С. 51-59.

7. Подуфалов Н.Д. О задачах по реализации Комплексного плана мероприятий по повышению качества математического и естественно-научного образования до 2030 года и проблемах оптимизации содержания общего образования. Труды Международной научно-практической интернет-конференции «Актуальные проблемы методики обучения информатике и математике в современной школе» (МПГУ, 22-30 апреля 2025 года), секция 4. https://news.scienceland.ru/апрель – 2025/

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 37.018.46

Д. И. Прохоров

Применение возможностей искусственного интеллекта для организации процесса повышения квалификации учителей математики

В статье дано содержательное и функциональное описание авторского веб-ориентированного ресурса, предназначенного для сопровождения обучения учителей математики на повышении квалификации по теме «Дидактический дизайн преподавания математики в учреждениях общего среднего образования». Сделан вывод о том, что на данный момент еще не в полной мере разрешены психолого-педагогические и морально-этические проблемы, связанные с взаимодействием педагогических работников с нейронными сетями.

Ключевые слова: *искусственный интеллект, веб-ориентированный ресурс, повышение квалификации, учителя математики.*

D. I. Prokhorov

Using artificial intelligence capabilities to organize the process of advanced training of mathematics teachers

The article provides a substantive and functional description of the author's web-oriented resource intended to support the training of mathematics teachers in advanced training on the topic "Didactic design of teaching mathematics in general secondary education institutions". It is concluded that at the moment, psychological, pedagogical and moral-ethical problems associated with the interaction of teaching staff with neural networks have not yet been fully resolved.

Keywords: *artificial intelligence, web-oriented resource, advanced training, mathematics teachers.*

В эпоху цифровизации и глобализации система образование переживает трансформации, обретая новые высокоинтеллектуальные

аспекты, включая внедрение различных цифровых инструментов, таких как нейросети, искусственный интеллект, GPT-чаты и другие технологии. В последние годы искусственный интеллект (далее – ИИ) все больше интегрируется в нашу повседневную жизнь, предоставляя социуму разнообразные возможности, улучшая качество жизни и способствуя самообразованию и самореализации педагогических работников. Согласно Кодексу Республики Беларусь об образовании, под повышением квалификации руководителей и специалистов (далее – ПК) понимается процесс «реализации образовательных программ, направленных на профессиональное совершенствование работников» [Кодекс, 2024]. Следует отметить, что на данный момент в Республике Беларусь отсутствует нормативная правовая база, регламентирующая использование ИИ в целом, и в образовательном процессе в частности. В некоторой степени данные вопросы регулируются Указом Президента Республики Беларусь от 1 февраля 2010 г. № 60 «О мерах по совершенствованию использования национального сегмента сети Интернет», Законом Республики Беларусь от 7 мая 2021 г. № 99-З «О защите персональных данных» с их изменениями и дополнениями, а также рядом подзаконных нормативных актов. В отличие от Российской Федерации, где на данный момент разработано 63 Стандарта по направлению «Искусственный интеллект», причем 4 из них непосредственно касаются системы образования.

Нами разработан веб-ориентированный ресурс (далее – авторский ресурс) для сопровождения обучения учителей математики на повышении квалификации по теме «**Дидактический дизайн преподавания математики в учреждениях общего среднего образования**» [Прохоров, 2025]. Разработка учебной программы ПК была обусловлена необходимостью комплексной модернизации образовательного процесса посредством использования цифровых инструментов, формирования у учителей математики навыков работы со специальными онлайн-сервисами и приложениями по созданию дидактических многомерных инструментов и информационно емких визуальных материалов. Учебная программа ПК учителей математики направлена на совершенствование их профессиональной компетентности в области струк-

турирования и визуализации учебной информации с использованием современных компьютерных приложений. В ходе обучения слушатели осваивают технологии создания *дидактических многомерных инструментов*, т.е. визуальных средств многокомпонентного типа с иллюстративно-мнемоническими и регулятивными свойствами (поддержка категоризации и экспликации, анализа и синтеза, навигации и аутодиалога), содержащих алгоритмы графического сгущения учебных знаний по математике, состоящих из четырех этапов – кодирование, укрупнение, структурирование и раскодирование, а также методику их использования на учебных занятиях.

Ориентация на навыки XXI в. все больше влияет на процесс оценки учебных достижений слушателей ПК. Ранее считалось, что достаточно следить за выполнением текущих заданий и успешным прохождением итоговой аттестации, но теперь ясно, что повышение уровня профессиональных компетенций учителей математики, требует дополнительного развития множества навыков и умений, которые должны оцениваться как важные элементы индивидуальной траектории обучения. Кроме основных факторов, таких как посещаемость и выполнение заданий, должны также учитывать активность участия, настойчивость, количество обращений к веб-ориентированному ресурсу, время работы с ним и другие ключевые параметры. Без использования технологий ИИ, встроенных в ресурсы обучения, проводить такой мониторинг достаточно затруднительно.

Авторский ресурс рекомендован к использованию в процессе ПК учителей математики Научно-методическим советом ГУО «Минский городской институт развития образования», и включает (рисунок 1):

– глоссарий (более 180 понятий и терминов);

– следующие формы установления взаимодействия, учебной и профессиональной коммуникации преподавателя со слушателями (учителями математики): e-mail преподавателей, форум «Вопрос-Ответ» (обсуждение заданий, методическая поддержка, техническая поддержка), чат-бот «Профессор МГИРО» (@professorMGIRO_bot) – Телеграм-чат на основе ИИ;

– материалы для освоения содержания программы ПК учителями математики: вопросы государственной политики в сфере цифровизации образования (2 темы), научно-теоретические основания структурирования содержания обучения математике (5 тем), основы работы со специализированным программным обеспечением (11 тем);

– примеры фрагментов дидактических сценариев учебных занятий, отражающих методику использования дидактических многомерных инструментов при обучении математике (база постоянно пополняется материалами, разработанными учителями математики в процессе ПК);

– коллекцию готовых учебных математических апплетов и методические указания по их использовании на учебных занятиях по математике на II–III ступенях общего среднего образования;

– фрагменты видео лекций и практических занятий, где даются инструкции по работе с компьютерными программными средствами: редакторами векторной графики, динамическими программными средами, конструкторами инфографики, учебными математическими апплетами, GPT-чатом и т.д., а также алгоритмы разработки собственных веб-ориентированных ресурсов;

– материалы для текущей и итоговой аттестации (дифференцированные по трем уровням сложности).



Рис.1. Структурно-логическая схема веб-ориентированного ресурса

По нашему мнению, в процессе ПК учителей математики целесообразно использовать те методы и средства ИИ, которые будут применяться в профессиональной деятельности, а также являются общезначимыми и могут использоваться не только в профессиональной деятельности, но и в обыденной жизни (например, чат-боты). Телеграм-бот «**Профессор МГИРО**» (@professorMGIRO_bot) разработан на основе технологии нейросетей GPT-4, свободно ведет диалог по содержанию учебной программы повышения квалификации учителей математики по теме «Дидактический дизайн преподавания математики в учреждениях общего среднего образования». Кроме общедоступных баз методической литературы и цифровых образовательных технологий, в телеграм-бот добавлены дополнительные векторные базы: 12 пособий по методике преподавания математики и внешние базы данных, касающиеся применения ИКТ в образовательном процессе.

В целях безопасности и противодействия нарушению нормативных правовых положений, распространению фейков и деструктивной информации, а также с целью соблюдения морально-этических норм педагога, алгоритм ИИ телеграм-бота «Профессор МГИРО» жестко ограничен рамками содержания методики обучения математики, психолого-педагогическими требованиями к разработке и внедрению цифровых технологий в образовательный процесс. В случае, если пользователь попытается задать вопрос, выходящий за рамки ограничений, телеграм-бот выдаст ответ – «Извините, но я не могу обсуждать вопросы, не связанные с методикой обучения математике и цифровыми технологиями. Если у Вас есть вопросы по дидактическому дизайну, преподаванию математики или внедрению цифровых технологий в образовательный процесс, я с радостью помогу Вам!».

Следует отметить, что такой опыт взаимодействия с веб-ориентированным ресурсом, полученный учителями математики в процессе ПКиСД, будет служить примером практического применения ИИ для предотвращения нарушения кибербезопасности и защитить конфиденциальные данные, а также позволит предупредить такие случаи, когда поисковые запросы и информационное поведение их учащегося может свидетельствовать о деструктивных намерениях.

Важно подчеркнуть, что технологии ИИ существенно увеличивают значимость преподавателя, а не заменяют его. Часто упоминаемая фраза Дэвида Торнбурга: «любой учитель, которого может заменить компьютер, этого заслуживает» [Торнбург, 2015, с. 189], может вызывать споры, но она акцентирует внимание на том, что в настоящее время нет технологий, способных воспроизвести и, тем более, заменить множество навыков и качеств, присущих педагогам-профессионалам.

Библиографический список

1. Кодекс Республики Беларусь об образовании: 13 янв. 2011 г. № 243-З: принят Палатой представителей 2 дек. 2010 г.: одобр. Советом Респ. 22 дек. 2010 г.: в ред. Закона Респ. Беларусь от 8 июля 2024 г. № 22-З // ЭТАЛОН: информ. -поисковая система (дата обращения: 24.05.2025).

2. Прохоров Д.И. Дидактический дизайн в преподавании математики в учреждениях общего среднего образования: методическое обеспечение учебной программы повышения квалификации, 2024. URL: https://do.minsk.edu.by/course/view.php?id=88-32#section-12 (дата обращения: 24.05.2025).

3. Торнбург Д. Открыто. Как мы будем жить, работать и учиться. М.: Олимп-Бизнес, 2015. 288 с.

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 378.147

Е.И.Смирнов

Реализация сложностной парадигмы в математическом образовании как фактор самоорганизации и развития мышления обучающихся

В статье исследуются фундаментальные проблемы современного математического образования в свете постнеклассической рациональности и актуализации сложностной парадигмы Э.Морена. Показана важность реализации синергетического подхода в обучении математике как в школе, так и в вузе на основе освоения сложных систем и знаний в поисковой и исследовательской деятельности обучающихся. Выявлены критерии отбора «проблемных зон» математического образования в свете инноваций и этапы самоорганизации и развития мышления обучающихся на основе фундирования опыта личности и освоения современных достижений в науке. Разработаны «куб» сущности и кластер фундирования обобщенных конструктов сложных систем и знаний как технологические механизмы формирования и развития самоорганизации и качеств мышления обучающихся.

Ключевые слова: *обучение математике в школе, синергия математического образования, кластеры и спирали фундирования опыта личности, математическое и компьютерное моделирование.*

E.I. Smirnov

Implementation of complexity paradigm in mathematical education as a factor of self-organization and development of students' thinking

The article explores the fundamental problems of modern mathematical education in the light of post-non-classical rationality and the actualization of complexity paradigm by E. Moren. It demonstrates the

importance of implementing a synergistic approach in teaching mathematics both at school and at university, based on the development of complex systems and knowledge in students' search and research activities. The article identifies the criteria for selecting "problem areas" in mathematical education in an innovations light and the self-organization stages and development of students' thinking, based on the founding of personal experience and the assimilation of modern scientific achievements. The "cube" of an essence and cluster of complex systems and knowledge generalized constructs founding have been developed as technological mechanisms for the formation and development of self-organization and qualities of students' thinking.

Keywords: *teaching of mathematics, mathematical education synergy, clusters and spirals of personality experience founding, mathematical and computer modeling.*

Введение. Проблема самоорганизации и развития мышления обучающихся в процессе освоения математики сложного знания диктует включенность разнообразных стратегий поведения, мышления и их социального взаимодействия в ходе освоения математического содержания. Это создает необходимость функционирования насыщенной информационно-образовательной среды, включения личностных преференций и выраженности интеллектуальных операций и способностей обучающихся. При этом возможность интеграции науки и образования, интеграция математического и компьютерного моделирования усиливает развивающий эффект и повышает учебную мотивацию, проявляет эмоционально-прикладные эффекты и создает ситуации проявления синергетических эффектов в освоении сложных систем и знаний. При этом важную роль могут играть процессы понимания и продвижения к сущности в условиях познавательной самоорганизации и возможности построения и развертывания индивидуальных образовательных маршрутов обучающихся. Прежде всего, возрастает потребность в актуализации и адаптации целостных конструкций и отношений в предметном содержании математического образования на основе обработки и учета персонифицированных данных личности с использованием функционала интел-

лектуальных систем. Операциональное развитие влияет на символическое, но не определяет его (П.Я.Гальперин, Н.Г.Салмина). Работа обучаемых с использованием формально-логического аппарата не ведет к повышению уровня обобщения, главное – важна адекватность деятельности формируемым знаниям на основе выявления сущности. Обобщенность, гибкость оперирования знаниями зависит не только от уровня операционального развития, но и от предметно-специфических знаний, ведущих к сущности и которые определяются структурой и способами формирования знаний [Рубинштейн, 1958].

Каким же образом и в каких образовательных ситуациях возможно эффективное использование сложных систем и знаний (в том числе, современных достижений в науке) в математическом образовании с эффектом самоорганизации и развития мышления обучающихся? Отражая *первое направление*, особенно отметим возможности адаптации современных достижений в науке к школьной математике в контексте роста эмоционально-прикладного эффекта, цифровизации освоения математических знаний, наглядного моделирования обобщенных конструктов и диалога культур в ходе совместной коммуникативной деятельности обучающихся. *Второе направление* возможного использования сложных систем и знаний в образовании можно связать с повышением качества поисковой и исследовательской деятельности школьников и инновационной деятельности педагога. Предельным аттрактором и результатом исследовательской деятельности школьников должно стать *приобщение к содержанию, методам, средствам и приложениям современных достижений в науке* (элементы фрактальной геометрии, теории кодирования и шифрования информации, нечеткие множества и fuzzy logic, обобщенные функции, цилиндр, конус и сфера Шварца, клеточные автоматы и т.п.), дифференцированные по факторам отражения содержания координатных параметров куба сущности Е.И.Смирнова [Смирнов, 2016], опирающихся, в том числе, на типологию модальностей восприятия информации. *Третье направление* возможного использования сложных систем и знаний в образовании связано с психологией преодоления трудностей личностью и си-

нергетическими эффектами перехода от хаоса к порядку. Тем самым, настоящее исследование представляет собой попытку разработки технологии управления процессами освоения иерархического содержания целостных конструктов сложных систем и знаний с проявлением синергетических эффектов в ходе развертывания индивидуальных образовательных маршрутов школьников в обогащенной информационно-образовательной среде.

Методология, методы и технологии. Исследование и значимость примеров самоорганизации в живой и неживой природе через процессы разрушения и созидания (хаоса и порядка) показали, что *нарастание сложности в открытых и неравновесных системах* не является деструктивным механизмом, а наоборот является необходимым переходом к новому уровню развития, более сложным и упорядоченным формам организации, в том числе, в образовательных структурах. Исследователи (В.В. Орлов, Ст. Бир, Н. Винер, Дж. фон Нейман, И.С.Утробин и др.) делают вывод о том, что сложность является интегрирующей характеристикой способности к самоорганизации при достижении определенных критических ее уровней, способности к эффективному развитию и саморазвитию мышления и личностных качеств обучающегося. Ученые философы, педагоги и психологи (И. Кант, Г.В. Гегель, И. Пригожин, С.П. Курдюмов, Г. Хакен, К. Майнцер, А.Н. Поддъяков, В.С. Степин, И.С. Утробин, Х. Альвен и др.) убедительно показали, что эффективное развитие личности происходит при освоении сложного знания (разных уровней его сложности в зависимости от личностного развития обучающихся, включая инклюзивное образование), создания ситуаций преодоления трудностей в процессе освоения знаний и единой картины мира на основе высокой степени развертывания учебной и профессиональной мотивации обучающихся в единой сети взаимодействий, самостоятельности и когерентности. В познании сложного сам процесс познания «становится коммуникацией, петлей между познанием (феноменом, объектом) и познанием этого познания» (Э. Морен). Известные психологические исследования сложностной парадигмы (А.Н. Леонтьев, А.В. Запорожец [Салмина, 1994]) и мате-

матического образования (Л.В. Занков, Н.Ф. Талызина, В.А. Крутецкий, В.Д. Шадриков [Шадриков, 2022] создали фундамент для реформы мышления обучающихся.

Поэтому исследовательской деятельность в математическом образовании выражается как эффективная система саморегуляции личностных черт обучающегося (Ф. Маслоу, Г. Олпорт, К. Роджерс, А.М. Матюшкин, М.М. Кашапов и др.). Разрешение противоречий, связанных с качеством и успешностью исследовательской деятельности школьников и объективным оцениванием результатов обучения математике, возможно при усилении *индивидуализации* исследовательского и оценочного процесса и развитии субъектности школьников на основе распознавания процессов и результатов адаптации сложных знаний и процедур, создание условий для раскрытия внутренних процессов и механизмов адекватности освоения познавательных процессов и внешних актов на основе идентификации личности в процессе освоения сложных знаний и процедур: *персонализация* - представленность субъекта в других людях; *обособление* – выделение индивида во взаимодействии с другими людьми; *присвоение* индивидом всесторонней человеческой сущности (З. Фрейд, М.А. Холодная, Ю.Б. Гиппенрейтор, В.С. Мухина, В.В. Сериков, И.С. Якиманская, А.В. Хуторской и др.).

Цель: разработать методологические, теоретические и технологические основы освоения сложных систем и знаний в исследовательской деятельности школьников в структуре общего образования на основе адаптации современных достижений в науке на основе синергетического и средового подходов:

- Разработать и реализовать депозитарий сложных математических систем и знаний на основе выявления критериев отбора, актуализировать интеграцию математического и компьютерного моделирования, усилить эмоционально-прикладные эффекты;

- Разработать и обосновать методику исследовательской деятельности школьников на основе проявления синергии математического образования в ходе адаптации современных достижений в науке, в том числе с использованием интеллектуальных систем в насыщенной информационно-образовательной среде;

- Определить содержание и структуру исследовательской деятельности школьников на основе синергетического и средового подходов, компьютерного моделирования и гибридного интерфейса с учетом личностных преференций, и диалога культур в совместной когнитивной деятельности. Провести вычислительные эксперименты, лабораторно-расчетные работы (в том числе, с использованием интеллектуальных систем) и проверить эффективность и валидность полученных результатов.

Античные философы Платон, Аристотель, Стагирит устанавливали онтологическое различие между простым и сложным, которое выражается в традиционных для древнегреческой мысли парах противоположностей, таких как «единое-многое», «элементарное-составное», «необходимое-случайное». Решение проблем вычислительной сложности (А. Тьюринг, С. Кук, М. Рабин и др.) показало, что именно временные характеристики играют наиболее важную роль в оценке сложности задачи (задачи Р-класса (Р-трудность) – полиномиальное время, задача коммивояжера- экспоненциальное время и т.п.). «Сложность означает много разных вещей — существует дескриптивная сложность и вычислительная сложность. Алгоритм может быть чрезвычайно сложным в смысле способа его построения и при этом работать очень быстро, так как его вычислительная сложность низка. Таким образом, мы имеем различные понятия о сложности. Мне не ясно, имеют ли в виду одно и тоже понятие инженеры-электронщики, экономисты, математики, специалисты по информатике и физики, когда употребляют термин сложность» [Карп, 1993, с. 498-521]. Существуют подходы, когда сложность связывается со временем образования системы или с ее иерархической структурой, а также, с вероятностью образования системы из исходных элементов, иногда сложность может означать способность системы к генерированию семиотических информационных связей и осуществлять на их основе взаимодействие с внешней средой, позволяющее реализовать иерархическую структуру управления. Следуя И.Р. Пригожину, понятия «сложность есть возникновение бифуркационных переходов вдали от равновесия и при наличии подходящих нелинейностей, нарушение симметрии выше точки

бифуркации, а также образование и поддержка корреляций макроскопического масштаба» [Пригожин, 2017]. Рассматривая научное знание как сложную систему многообразия обобщенных конструктов в единстве познания, отметим дидактический аспект его адаптации к школьной математике расширением сущностных и феноменологических характеристик отражения актуальных приложений и необходимости компьютерного и математического моделирования в онтогенезе.

Таким образом, наш подход основан на том, что *сложное знание* — это результат познания о содержании и семиотических информационных связях нелинейных систем, объектов и явлений реального и виртуального мира, представленный в единстве дескриптивного и вычислительного многообразия и иерархий представления содержания с возможностью актуализации бифуркационных переходов и различных интерпретаций, и генераций форм проявления сущности. Это приводит к выявлению следующих *характеристик сложного знания* о нелинейных системах, объектах и явлениях реального и виртуального мира:

- наличие возможности интерпретации и генерации компонентов содержания и семиотических информационных связей с выраженными прикладными эффектами;

- информация о единстве дескриптивного и вычислительного многообразия и иерархий представления содержания и семиотических информационных связей;

- возможность актуализации бифуркационных переходов и различных интерпретаций, и генераций форм проявления сущности методами математического и компьютерного моделирования.

Исторический опыт решения мировых проблем математики показывает, что, например, результат познания следующих задач является *сложным математическим знанием*: задача о 4 красках для раскраски карт (В. Хакен, К. Аппель); гипотеза Римана о нулях дзета-функции; бинарная проблема Гольдбаха; рациональность числа Эйлера-Маскерони; проблема P = NP – трудности для вычислительной эффективности переборных задач (С. Кук, Л. Левин, А. Вигдерсон); великая теорема Ферма (А. Вайлс); фрактальные характеристики цилиндра, конуса, сферы и «кубка» Шварца (Б. Мандельброт,

Е.И. Смирнов, А.Д. Уваров) и др. Обобщенный конструкт сложного математического знания может представлять прикладное или практико-ориентированное знание, исследование и проявление сущности которого основано на симбиозе математического и компьютерного моделирования. Таковым могут быть элементы фрактальной геометрии: вариации множеств Жюлиа и Мандельброта [4], игры «хаоса» в рандомизированном конструировании и исследовании фрактальных характеристик «салфетки Серпинского» и ее обобщений, исследование странных аттракторов Хенона, Реслера и Лоренца; теория графов (транспортные сети, теория массового обслуживания и т.п., Л. Эйлер, Ф. Харари, Р. Дизель); нечеткие множества и fuzzy logic (Л. Заде, Е. Мамдани); кодирование и шифрование информации (К. Шеннон, Хаффман); стохастические методы оптимизационных задач (Дж. Холланд, Дж. Коза) и т.п. При этом постнеклассическое мышление современного индивидуума, базирующееся на нелинейности окружающей реальности, ситуативности и неопределенности в принятии решения, множественного целеполагания и неоднозначности выбора настоятельно диктует необходимость и возможность освоения и *принятия нового научного знания (равно как и формирование математической грамотности обучающегося) посредством преодоления сложного* (например, современные достижения в науке), включающего это новое знание, как императива перехода от хаоса к порядку. Это диктует необходимость выстраивать, исследовать и рассматривать разноуровневое сложное как условие выстраивания параметров порядка мотивированного освоения математики и перехода к динамически устойчивым состояниям нового уровня сложности приемов и актов математического мышления. *Именно освоение сложного математического знания школьниками позволяет создавать исследовательские ситуации, ведущие к способности поддерживать динамическую устойчивость состояния мыслительной деятельности при допустимых значениях внутренних или внешних возмущений (флуктуаций) математической деятельности в процессах адаптации обобщенных конструктов в исследовании современных достижений в науке*.

Важным контекстом является постановка *внешних факторов воздействия* в виде множественности целеполагания, выстраивания этапов и иерархий знаково-символической и образно-геометрической деятельности в направлении фундирования сущности математических объектов и процедур [Смирнов, 2012], поиска и анализа побочных решений с использованием информационных технологий , выявления бифуркационных переходов и бассейнов притяжения в исследуемых процессах на основе вариативности и параметризации, обеспечение когерентности информационных потоков в появлении новой продукта на основе диалога культур (в том числе, в условиях сетевого взаимодействия*)*. Исследователи делают вывод о том, что сложность является интегрирующей характеристикой способности к самоорганизации при достижении определенных критических ее уровней, способности к эффективному развитию и саморазвитию мышления и личностных качеств обучающегося. Ученые философы, педагоги и психологи [Хакен, 2014; Малинецкий, 2006; Морен, 2003; Поддъяков, 2015; Мандельброт, 2002], что эффективное развитие личности происходит *при освоении сложного знания* (разных уровней его сложности в зависимости от личностного развития обучающихся, включая инклюзивное образование), создания ситуаций преодоления трудностей в процессе освоения знаний и единой картины мира на основе высокой степени развертывания учебной и профессиональной мотивации обучающихся в единой сети взаимодействий, самостоятельности и когерентности.

Постижение сложного достигается через проявление его сущности. Так как сущность обнаруживает свою реальность в совокупности внешних характеристик предмета, в своих проявлениях, то раскрывая сущность через философские категории внутреннего, общего, содержания, причины, необходимости и закона определим, прежде всего, *компонентный состав содержательных и процессуальных характеристик проявления сущности*. Содержательный модус: знаково-символические, вербальные, образно-геометрические и тактильно-кинестетические проявления; процессуальный модус: историко-генетические, конкретно - деятельностные, экспериментальные и прикладные проявления. Постижение сущности предмета обучающимся требует усилий по

выявлению этапности и выраженности необходимых существенных связей. Однако, целостность представления сущности создает прецедент присоединения дополнительных связей, возможно несущественных, но которые определяют в единстве требуемый функционал математического объекта для постижения эффекта понимания. Эта особенность когнитивного движения к пониманию сущности выражается в актуализации этапов познания, основанных на личностных особенностях обучающегося, и определяет третье измерение сущности – личностно- адаптационное. Таким образом, *формализация сущности математических объектов сложного знания представляется в виде структурно-функциональной модели* (рис.1):

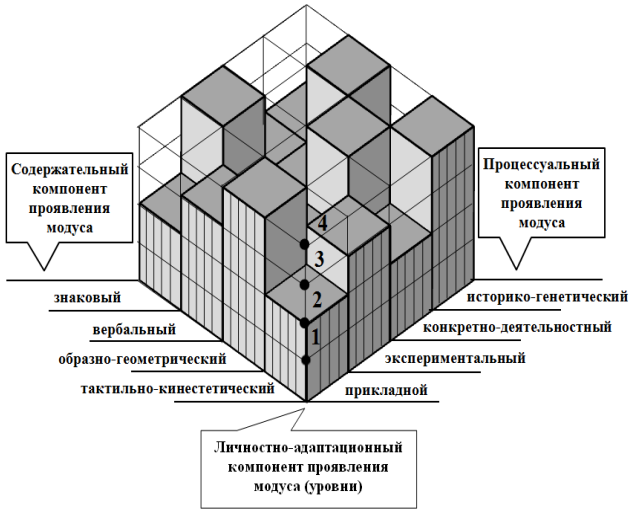


Рис.1. «Куб сущности» математического объекта сложного знания

Однако, постижение сущности сложного знания становится более адекватным личностным особенностям обучающегося, когда формализуется в виде последовательности наглядных моделей, объединяющихся в спираль или кластер фундирования базовых учебных элементов. *Таким образом, формируется инновационный*

тезис: фундирование опыта как инновационный механизм движения к самоорганизации и развитию личностных качеств обучающегося есть механизм движения к сущности сложного знания в трех категориях: обобщении содержания обучения математике, технологии адаптаци к обобщенному конструкту и эффекта формирования и развития личностных качеств обучающихся.

1. *Адаптация личности как система внутреннего взаимодействия* знаний, умений, установок, ценностей на основе эффекта приспособления личности к внешним воздействиям с позитивным результатом познания исследована учеными (Реан А.А. [8], Толстых Ю.И. [9]). Сложные системы и знания (в том числе, современные достижения в науке) представляются в непосредственном восприятии школьника как *неясный и неопределенный* обобщенный конструкт, состоящий и символов, и знаков. Поэтому необходим фундирующий модус единой связи освоенных школьных учебных элементов и поэтапного движения к сущности обобщенных конструктов сложного знания (Э. Гуссерль, М. Хайдегер) как элемент технологии адаптации личности с эффектами самоорганизации, роста учебной мотивации и саморазвития на основе проявления синергетических эффектов. В этом процессе определяются *три составляющих компонента*: когнитивный, процессуальный и личностно-адаптационный [Смирнов, 2017]. При этом оказываются согласованными процессы проявления синергии в обучении математике сложного знания и движения к выраженности сущности обобщенных конструктов посредством наглядного моделирования, процессов обобщения и согласованности когнитивных действий обучающихся в диалоге культур. Такие процессы возможны только в функционировании неравновесных систем сложного знания в условиях открытой образовательной среды, включающей математическое и компьютерное моделирование (рис.2).

2. Тип моделирования обобщенного конструкта современного научного знания на основе выявленной сущности может быть феноменологическим и генетическим. Поэтому технология проявления синергии в процессах адаптации современных достижений в науке в школьной математике может быть ориенти-

рована соответственно на феноменологический или генетический тип выявления сущности обобщенного конструкта научного знания.



Рис.2. Синергетические эффекты и фундирующие модусы движения к сущности

Фундирующие процедуры перехода от наличного состояния сущности и ее актуального представления к обобщенному потенциальному развитию сущности в форме идеального объекта (процесса или явления, состояния личностных качеств) являются многоэтапными, полифункциональными, направленными и интегративными по актуализации внутри и межпредметных связей. При этом процедуры перехода в зонах ближайшего развития будут более выраженными и направленными, если ориентировочная и информационная основы учебной деятельности обучаемых цементируются специально проектируемым содержанием обучения, наглядно моделируемым в форме спиралей или кластеров фундирования базовых учебных элементов.

Результаты. Проектно-исследовательская деятельность школьника разворачивается в логике последовательного развертывания уровней освоения когнитивной деятельности. На основе историогенеза уровневости (Андреев В.И., Зимняя И.А., Савенков А.И., Поддъяков А.Н. [Поддъяков, 2015] и др.) нами предлагается следующая типология *уровней* проектно-исследовательской деятельности школьников в информационной образовательной среде:

● **Поисково-репродуктивный (ПР) –** (*самоактуализация («мне это интересно»):* характеризует и проявляется в выраженности ценностных и личностно – адаптационных характеристик познавательной деятельности обучающихся по отбору, актуализации личностных проб и освоению *эталонов и образцов феноменологии* наглядного моделирования обобщенного конструкта сложного знания (современных достижений в науке) и результатов диагностических процедур на: значимость и ценностные ориентиры , выбор способов деятельности по раскрытию *отдельного качества* проявления обобщенной сущности (содержательного или процессуального компонента – см. рис.1); поиск и анализ доступности, трудности и личностной значимости выявления этапов научного познания, методов исследования и механизмов осуществления внутрипредметных и межпредметных связей на основе профессионально-ориентированного и исследовательского подходов; настрой личности на самоопределение и самоорганизацию, освоение принципов и стилей научного мышления: индукции, дедукции, инсайта, аналогии, инверсии и антиципации;

Данный уровень обеспечивается базами данных (экспертные системы) образцов, эталонов и «проблемных зон» современного научного знания с потенциалом симбиоза математического и компьютерного моделирования, базами данных методологии организации проектно-исследовательской деятельности, возможностями информационно-коммуникационных средств поддержки на основе результатов диагностики научного потенциала школьника. Предполагает различные формы педагогической поддержки и кооперации, организацию дискуссий, конференций, семинаров, открытость информационно-образовательной среды.

● **Эмпирический (Э) –** *(самоопределение («что я могу сделать»):* проявляется в реализации эмпирических проб и проектировании наглядных моделей средствами экспериментальной математики методами математического и компьютерного моделирования частных проявлений сущности обобщенного конструкта сложного знания на основе познавательной *самостоятельности* и актуализации действий, компетенций и характеристик личностных качеств. Реализация процесса выявления эмпирических связей и преемственности эмпирических обобщений, метода проб и ошибок, разнообразие постановки задач и гипотез, поиск точек бифуркации и бассейнов притяжения, аттракторов, итерационных процессов и флуктуационных зависимостей, сравнительный анализ и выбор приоритетов в методах, содержании, информационных средствах поддержки проектно-исследовательской деятельности, *осознание функциональности уровня математического содержания и компьютерного дизайна частных проявлений сущности обобщенного конструкта и коррекции состояния его параметров и условий,* адекватности и эффективности соотнесения направленности «цель-результат».

Данный уровень обеспечивается содержанием разнообразных информационных сред: Mathcad, MathLab, Mathematica, Maple, GeoGebra, Creator и др. с потенциалом симбиоза математического и компьютерного моделирования на основе результатов диагностики научного потенциала школьника и первых результатов исследовательских процедур. Предполагает различные формы педагогической поддержки и кооперации, организацию дискуссий, конференций, семинаров, публикации и презентации, открытость информационно-образовательной среды.

● **Теоретический (Т) –** (самоорганизация («я способен управлять процессом») – проявляется в проектировании и организации освоения инноваций постижения и адаптации сложного знания (современных достижений в науке) на основе развертывания его фундирующих. Данный уровень направлен на проявление методологии научного общения, деятельности и образцов научного мышления, выраженности процессов интеграции математи-

ческого и компьютерного моделирования, результатов теоретического анализа баз данных и знаний в проведении проектно-исследовательской деятельности.

● **Творческий (ТВ) –** *(оценка эмпирической верификации результатов)* – проявляется в проектировании функций и этапов мониторинга и диагностических процедур измерения состояния и расширения творческого опыта, определении и оптимизация технологических процедур и перехода на более высокие уровни сложности обобщенного конструкта научного знания (современных достижений в науке), определение уровня освоения сущности обобщенного конструкта и этапов развертывания спиралей и кластеров фундирования сложного знания;

- *саморазвитие личности («я могу сделать что-то новое»)-х*арактеризуется: содержанием и характеристиками переноса инноваций в массовую практику освоения содержания школьной математики; поиском и конструированием побочных продуктов исследования и возможных приложений к другим наукам, интеграцией индивидуального и социального в проектировании инновационных обобщающих конструктов; проявлением синергетических эффектов, информационным обменом, социализацией и верификацией инновационной деятельности; характеристиками , параметрами и показателями становления и выраженности индивидуальных образовательных траекторий школьников.

Данный уровень обеспечивается базами данных (экспертные системы) образцов, эталонов творческого исследования современного научного знания с потенциалом симбиоза математического и компьютерного моделирования, базами данных образцов верификации научных результатов и научного общения, образцами эффективных приемов научного мышления в проведении проектно-исследовательской деятельности, возможностями информационно-коммуникационных средств поддержки на основе результатов диагностики научного потенциала школьника и творческих результатов исследования. Предполагает различные формы педагогической поддержки и кооперации, организацию дискуссий, конференций, семинаров, публикации и презентации, открытость информационно-образовательной среды.

Работа со сложными системами и знаниями создает эффект преодоления трудностей для обучающегося, интегрирует междисциплинарные связи, актуализирует социальное взаимодействие в малых группах и стимулирует развертывание индивидуальных образовательных траекторий развития обучающихся [Розанова, 2016].

Критерии выявления «зон современных достижений в науке*»* применительно к обучению математике, основаны на особенностях решения сложных задач и имеют следующие характеристики:

● в динамике освоения современных достижений в науке средствами школьной математики есть возможность *вскрытия противоречий и явной неадекватности способов и приемов анализа и исследования информации*, невозможность переноса связей и процедур учебных элементов в частном их проявлении на более общую конструкцию, актуальность построения контрпримеров, присутствие доли неопределенности и непредсказуемости в определении прикладных возможностей обобщенного конструкта, ограниченность объема учебных элементов, требующих разнообразных решений, построенных на основе эмпирических, а не только теоретических обобщений, возможность развития дивергентного мышления обучающихся и понимания функционирования математических;

● процесс выявления сущности учебных элементов в сложных «зонах современных достижений в науке» основан на *множественности целеполагания и возможности выявления этапов математического моделирования обобщенного конструкта* и разумной конечности этапов адаптации обобщенной сущности к наличному состоянию опыта математической деятельности. Эффективные правила (*фундирующие модусы* [Смирнов, 2015]) поэтапного развертывания сущности могут быть выделены, но они будут с неизбежностью достаточно вариативны на основе *наглядного моделирования* [Смирнов, 1997] и принципиально зависимы от контекста;

● необходимы *разнообразные поисковые пробы с использованием информационных технологий* (экспериментальные срезы, варьирование условий и параметров функционирования «зоны современных достижений в науке», сравнительный анализ конкретных проявлений, компьютерное моделирование, аналогии,

анализ через синтез (С.Л. Рубинштейн) и т.п.) Результаты могут быть неизвестны заранее, алгоритмы и процедуры деятельности фрагментарны как стратегии, эвристики имеют, в частности, неопределенный характер;

- результаты исследования сложных систем и знаний имеют неоднозначный характер; множественность результатов создает трудно прогнозируемую ауру, симптоматично образуются разнообразные побочные, непредсказуемые продукты.

Технология исследования «зоны современных достижений в науке» в обучении математике с синергетическими эффектами основана на поэтапном *феноменологическом типе* раскрытии сложной сущности обобщенного конструкта «зоны» средствами математического и компьютерного моделирования в условиях диалога и единства математической, информационной, естественнонаучной и гуманитарной культур [Дворяткина, 2012].

Таким образом, разработана технология исследования и адаптации «зон современных достижений в науке» в математическом образовании школьников с проявлением синергетических эффектов и атрибутов. Выявлены сущность, критерии отбора и задачи исследования «зоны современных достижений в науке», а также реализованы и конкретизированы технологические конструкты для освоения обобщенного конструкта сложных систем и знаний. Построен кластер фундирования процессов адаптации сущности обобщенного конструкта с актуализацией атрибутов и этапов проявления синергии в процессе обучения математике. Именно, исследованы на основе множественного целеполагания проявления бифуркационных переходов и флуктуации нечетких моделей реальных процессов и динамических процедур, визуализированы и исследованы этапы адаптации обобщенного конструкта к наличному содержанию школьной математики в направлении доступности знаний и процедур. Интеграция математических, информационных, естественнонаучных и гуманитарных знаний в контексте диалога и единства культур реализована как дидактический механизм актуализации и проявления синергии в обучении математике с использованием компьютерного и математического моделирования.

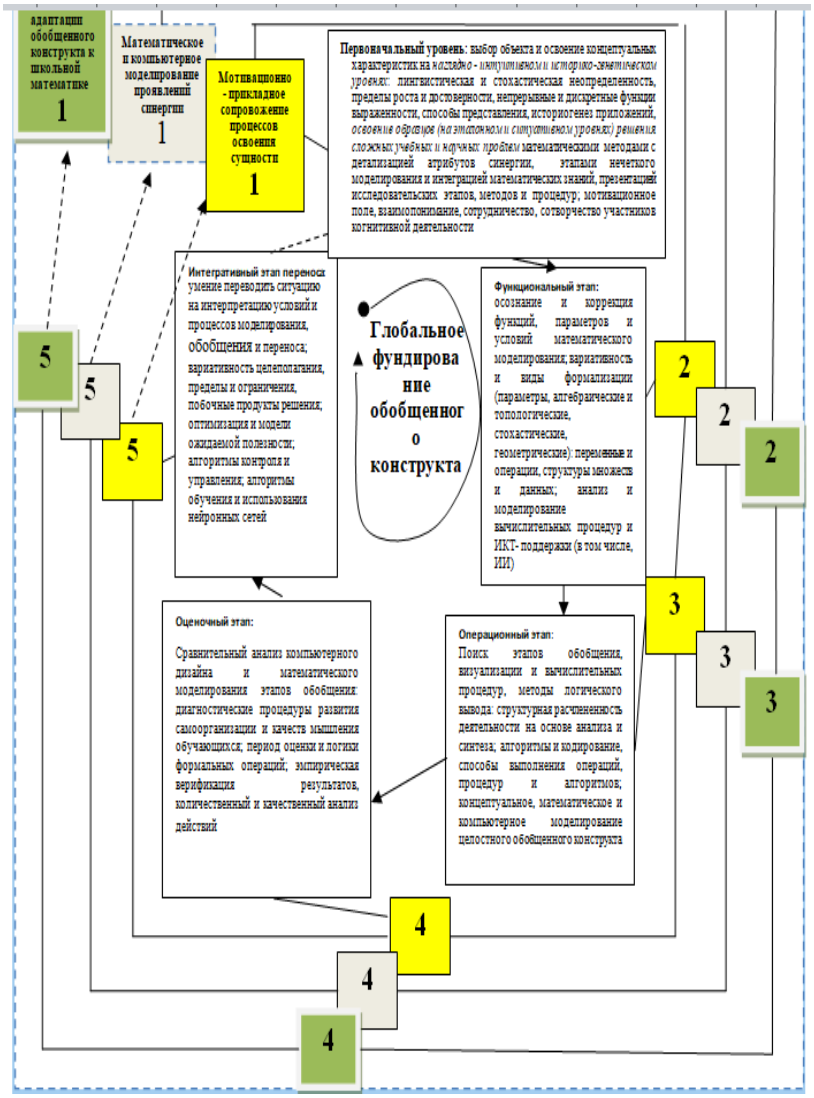


Рис.3. Кластер фундирования проявлений синергии в адаптации обобщенного конструкта

Заключение. Выявление и исследование «зон современных достижений в науке» в обучении математике школьников средствами компьютерного и математического моделирования позволяет осваивать обобщенные конструкты базовых учебных элементов в контексте диалога культур и интеграции знаний из различных областей наук. При этом открытость образовательной среды, сложность математических конструкций, множественность целеполагания и возможность получения побочных продуктов создают основу для эффективного развития интеллектуальных операций мышления, повышают учебную мотивацию, креативность и самоорганизацию личности в контексте межкультурных коммуникаций.

Библиографический список

1. Рубинштейн С.Л. О мышлении и путях его исследования. М.: АН СССР, 1958.

2. Смирнов Е.И., Осташков В.Н. Синергия образования в исследовании аттракторов и бассейнов притяжения нелинейных отображений // Ярославский педагогический вестник. Серия психолого-педагогических наук. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2016. № 6. С. 146-157.

3. Салмина Н.Г. Концепция Выготского и развитие символической функции // Вопросы психологии. Москва: Изд-во «Педагогика», 1994. № 5. С. 69-78.

4. Шадриков В.Д. Системогенез ментальных качеств человека. М.: Изд-во «Институт психологии РАН», 2022.

5. Карп, Р. Комбинаторика, сложность, случайность / Р. Карп. М.: Мир, 1993. 560 с.

6. Prigogine I.R., Nikolis G. Cognition of the Complex / Moscow: 2017, Lenand. 360 p.

7. Мандельброт Б.Б. Фрактальная геометрия природы / Б.Б. Мандельброт. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 656 с.

8. Смирнов Е.И. Фундирование в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога. Ярославль: Изд-во «Канцлер», 2012. 654 с.

9. Хакен Г. Синергетика / Г. Хакен. М.: Мир, 1980. 435 с.

10. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подласов А.В. Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды / Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов, А.В. Подласов. М.: УРСС, 2006. 279 с.

11. Подъяков А.Н. Психология обучения в условиях новизны, сложности, неопределенности // Психологические исследования. М.: Высшая школа экономики, 2015. С. 6-10.

12. Реан А.А. Психология адаптации личности /СПб.: Прайм-Еврознак, 2008. 479 с.

13. Толстых Ю.И. Современные подходы к категории «адаптационный потенциал» // Известия ТулГУ. Гуманит.наука. 2011. № 1. С.493-496.

14. Смирнов Е.И. Сложность задач и синергия математического образования / Е.И. Смирнов, С.Ф. Бурухин // Задачи в обучении математике, физике и информатике: теория, опыт и инновации: материалы междунар. научно–практ. конф., посвященной 125-летию П.А. Ларичева. Вологда: 2017. С. 11-17.

15. Розанова С.А. Эффекты синергии математического, естественнонаучного и гуманитарного образования: структура, основные характеристики // Математика, физика и информатика и их приложения в науке и образовании: сборник тезисов докладов международной школы-конференции молодых ученых. Москва: МИРЭА, 2016. С. 243-245.

16. Абатурова В.С. Смирнов Е.И., Математическая грамотность как результат освоения обучающимися современных достижений в науке / В.С. Абатурова, Е.И. Смирнов // Ярославский педагогический вестник. 2021. № 6. С. 29-37.

17. Смирнов Е.И. Технология наглядно-модельного обучения математике. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 1997.323 с

18. Дворяткина С.Н. Развитие вероятностного стиля мышления студентов в обучении математике на основе диалога культур: автореф. дис. … док. пед. наук. Елец: Елецкий гос. ун-т, 2012. 48 с.

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 521

П. Н. Антонюк

О некоторых нерешенных задачах небесной механики

Формулируются новые задачи небесной механики: движения планет и колец Сатурна, коллективное движение астероидов Хильды.

Ключевые слова: *планеты, кольца Сатурна, аттрактор, устойчивость, точки либрации, астероиды Хильды.*

P. N. Antonyuk

On some unsolved problems of celestial mechanics

New problems of celestial mechanics are formulated: the motion of the planets and rings of Saturn, the collective motion of the Hilda asteroids.

Keywords: *planets, rings of Saturn, attractor, stability, libration points, Hilda asteroids.*

Небесная механика из раздела астрономии давно превратилась в раздел математики, где формулируются сложные математические задачи и для их решения применяются мощные математические методы. Рассмотрим здесь три новые задачи, основанные на наблюдениях движений небесных тел.

Первая задача «Планеты». Наблюдения показывают, что восемь планет Солнечной системы – Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун – вращаются на небольшом удалении от экваториальной плоскости Солнца и по почти круговым орбитам [1]. Необходимо показать, что гравитационные силы Солнца стремятся сделать движение планет более симметричным: сместить орбиты планет в экваториальную плоскость

Солнца, а сами орбиты превратить в окружности. На современном языке речь идет об аттракторе Солнечной системы, т.е. о таком движении планет, когда все планеты вращаются в плоскости экватора Солнца по круговым орбитам. Аттрактор притягивает к себе другие возможные геометрические конфигурации планетных орбит и таким образом обеспечивает устойчивость Солнечной системы. Незначительное отклонение движения планет от аттрактора объясняется внешними возмущениями: гравитационное воздействие планет-гигантов (четырех внешних планет), случайных астероидов, комет и т.д. Выравнивание орбит можно сравнить с выравниванием формы планет: чем больше масса планеты, тем ближе ее форма к шару, что объясняется изопериметрической теоремой [2].

Вращение Солнца вокруг своей оси приводит к сжатию около полюсов. Солнце принимает форму сплюснутого эллипсоида вращения, гравитационное поле которого является причиной медленного смещения планет в сторону экваториальной плоскости Солнца.

Движения Галилеевых спутников Юпитера (Ио, Европа, Ганимед, Каллисто) и крупнейшего спутника Сатурна Титана напоминают движение планет: плоскости их почти круговых орбит мало отличаются от экваториальных плоскостей Юпитера и Сатурна.

Сложнейшей проблемой устойчивости Солнечной системы занимались многие ученые. В первую очередь – это П.-С. Лаплас, а также А.Н. Колмогоров, В.И. Арнольд и Ю.К. Мозер.

Вторая задача «Кольца Сатурна». Наблюдения показывают, что кольца Сатурна лежат в его экваториальной плоскости и представляют собой систему концентрических окружностей с центром в планете [1]. Еще Дж. К. Максвелл в 1859 г. показал, что «кольца должны состоять из разъединенных частиц» [3, с. 101], каждая из которых независимо вращается вокруг Сатурна. Важный вклад в теорию колец Сатурна внесли также П.-С. Лаплас и С.В. Ковалевская. Необходимо показать, что концентрические кольца в экваториальной плоскости планеты образуют аттрактор,

к которому стремится (возможно медленно) любая система частиц, обращающихся вокруг этой планеты. Аттрактор обеспечивает устойчивость колец. Понятно, что вторая задача близка к первой задаче. Сегодня кольца открыты и у других планет: у Юпитера, Урана, Нептуна, а также у карликовых планет Хаумеа и Квавар.

Третья задача «Коллективное движение астероидов Хильды». Пять точек либрации *L*1, *L*2, *L*3, *L*4, *L*5 системы Юпитер-Солнце оказывают существенное влияние на малые тела, приближающиеся к Юпитеру. Первые три точки открыл Л. Эйлер, последние две открыл Ж.-Л. Лагранж. Вблизи орбиты Юпитера движутся четыре группы астероидов: главный пояс, «Греки» (вокруг точки *L*4), «Троянцы» (вокруг точки *L*5), Хильды (правильный треугольник с вершинами L3, *L*4, *L*5). Астрономы изучают астероиды более двух столетий – с начала XIX в. Если движение астероидов в первых трех группах объясняется в рамках небесной механики, то движение астероидов семейства Хильды еще предстоит объяснить.

Наблюдения показывают, что астероиды Хильды находятся в орбитальном резонансе с Юпитером 3 : 2, то есть за два оборота Юпитера вокруг Солнца каждый астероид успевает совершить три оборота. При этом коллективное движение астероидов воспринимается как вращение треугольника Хильды внутри орбиты Юпитера с угловой скоростью Юпитера и его пяти точек либрации. Индивидуальное движение каждого астероида вокруг Солнца по эллиптической орбите происходит с угловой скоростью, превышающей скорость Юпитера в среднем в полтора раза. Коллективное и индивидуальное движения не совпадают.

Наблюдаемый треугольник Хильды похож на треугольник Рёло́ – фигуру постоянной ширины. Покажем, что моделирование астероидов Хильды треугольником Рёло́ позволяет дать более точное математическое описание их движения по сравнению с правильным треугольником. Пусть Юпитер движется по круговой орбите единичного радиуса. Рассмотрим четыре параметра эллиптической орбиты для астероидов Хильды: 1) большая ось,

равная высоте треугольника, 2) расстояние Солнце-афелий, равное радиусу описанной около треугольника окружности, 3) расстояние Солнце-перигелий, равное радиусу вписанной в треугольник окружности, 4) эксцентриситет. Точные расчеты параметров дают правильные десятичные знаки:

	Модель «Правильный треугольник».	*Модель «Треугольник Рёло́».*
1)	1,500 000 000 000 … (согласно III закону Кеплера)	1,526 285 656 737 …
2)	1,000 000 000 000 …	0,881 201 434 777 …
3)	0,500 000 000 000 …	0,645 084 221 959 …
4)	0,333 333 333 333 …	0,154 700 538 379 …

Наблюдения астероидов Хильды приводят к выбору второй модели, а также, что более важно, указывают на новое направление поиска точных решений ограниченной задачи трех тел (система Солнце-Юпитер-астероид).

Библиографический список

1. Сурдин В.Г. Астрономия. Популярные лекции. М.: Издательство МЦНМО, 2019. 352 с.

2. Антонюк П.Н. Изопериметрическое неравенство и питеорема // Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова. Годичная научная конференция, 2023. М.: ИИЕТ РАН, 2023. С. 58-60.

3. Максвелл Дж. К. Об устойчивости движения колец Сатурна // Труды по кинетической теории /М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. С. 7-107.

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 378

В. В. Афанасьев, Е. И. Смирнов, С. А. Тихомиров

Николай Христович Розов и Колмогоровские чтения в Ярославле

В статье излагаются аспекты многолетнего сотрудничества члена-корреспондента Российской академии образования, доктора педагогических наук, профессора, декана-организатора факультета педагогического образования Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова Николая Христовича Розова (1938-2020) с Ярославским государственным педагогическим университетом им. К.Д.Ушинского, и в первую очередь по организации и проведению Колмогоровских чтений в Ярославле.

Ключевые слова: *Николай Христович Розов, Колмогоровские чтения, Российская академия образования, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского.*

V. V. Afanasyev, E. I. Smirnov, S. A. Tikhomirov

Nikolai Khristovich Rozov and the Kolmogorov Readings in Yaroslavl

The article describes aspects of the long-term cooperation of corresponding member of the Russian Academy of Education, doctor of pedagogical sciences, professor, dean-organizer of the Faculty of Pedagogical Education of Lomonosov Moscow State University Nikolai Hristovich Rozov (1938-2020) with Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky, and first of all for the organization and holding of Kolmogorov readings in Yaroslavl.

Key words: *Nikolai Khristovich Rozov, Kolmogorov Readings, Russian Academy of Education, Lomonosov Moscow State University, Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky.*

Хорошо известно, что родственники академика Андрея Николаевича Колмогорова по линии матери были выходцами из Ярославской губернии, а родовое имение Колмогоровых находилось в 20 км от Ярославля в поселке Туношна. По воспоминаниям академика В.И. Арнольда сам Андрей Николаевич с гордостью относил к себе крылатое выражение Н.В.Гоголя «расторопный ярославский мужик». В этой связи более 20 лет назад возникла инициатива проведения Колмогоровских чтений на Ярославской земле, приуроченных к его вековому юбилею и с целью отдать дань памяти, уважения, почёта выдающему учёному, педагогу, организатору. Примечательно, что вся сознательная жизнь А.Н. Колмогорова с юношеских лет была непрерывно связана с МГУ им. М.В.Ломоносова. Предтечей чтений явилась школа-семинар "Профессионализация предметной подготовки учителя математики в педагогическом вузе", проводившаяся в ЯГПУ им К.Д. Ушинского в 2000-2002 гг.

Для участия в работе первых чтений, состоявшихся в апреле 2003 г., в ЯГПУ приехало свыше 100 учёных, педагогов, аспирантов, студентов из 40 регионов России. Особенностью конференции явилось и то, что она проходила в год 200-летия высшей школы г. Ярославля.

Самая представительная делегация во главе с ректором академиком РАН Виктором Антоновичем Садовничим и тогдашним деканом факультета педагогического образования членом-корреспондентом РАО Николаем Христовичем Розовым прибыла именно из МГУ. Вот почему обращение участников конференции к общественности о проведении таких чтений на регулярной основе в ЯГПУ получило всестороннюю поддержку.

В рамках пленарного заседания чтений В.А. Садовничий обратился к участникам с приветственным словом. Виктор Антонович подчеркнул, что расцвет научно-педагогической деятельности А.Н. Колмогорова пришелся на 1950-1960-е гг., совпавшие с периодом мощного развития науки в стране, при этом научное и образовательное наследие Андрея Николаевича очень важно сохранить и приумножить для будущих поколений.



В.Д. Шадриков, В.В. Афанасьев, В.А. Садовничий
и бывший мэр г. Ярославля В.В. Волончунас (слева направо)
в Президиуме I Колмогоровских чтений

Среди многочисленных заслушанных после выступления В.А. Садовничего докладов стоит отдельно остановиться на докладе Н.Х. Розова. Его доклад был посвящен в целом научно-педагогическому наследию А.Н. Колмогорова.

В своем докладе Николай Христович резонно акцентировал внимание на том, что многие крупные научные результаты получили имя Колмогорова: "критерии Колмогорова", "аксиоматика Колмогорова", "теорема Колмогорова", "КАМ - теория" и другие. Статьи, заметки, книги, вышедшие из-под пера Андрея Николаевича, по-прежнему очень актуальны, а по его учебникам обучаются математике тысячи учащихся. При этом изучение его неординарной биографии, разнопланового научно-педагогического и организаторского труда, ярких качеств его личности и нетривиальных жизненных взглядов находится далеко от полного завершения.

Также с пленарными докладами выступили столь крупные ученые, педагоги как В.М. Тихомиров, А.М. Абрамов, С.Н. Бычков, А.К. Кудрин, В.М. Монахов, В.А. Гусев и В.А. Тестов.

В последующие дни чтений успешно отработал целый ряд секций, посвященных современным проблемам математики и ее

преподавания, вопросам истории и философии математики и математического образования.

Так более 20 лет назад на Ярославской земле было положено начало систематическому изучению жизни и деятельности, научных работ, а также воспоминаний учеников и коллег гениального педагога, математика и нашего земляка – А.Н. Колмогорова, а Николай Христович Розов стал постоянным членом организационного комитета Колмогоровских чтений и членом редакционной коллеги сборника трудов данного форума.



Н.Х. Розов на пленарном заседании
I Колмогоровских чтений (2003)

В дальнейшем Н.Х. Розов многократно принимал участие в Колмогоровских чтениях на ярославской земле. Приведем список тем его докладов на чтениях с 2006 по 2015 гг. (см. также [Программа IV Колмогоровских чтений], [Программа V Колмогоровских чтений], [Программа VII Колмогоровских чтений], [Программа VIII Колмогоровских чтений], [Программа IX Колмогоровских чтений], [Программа X Колмогоровских чтений], [Программа XI Колмогоровских чтений], [Программа XII Колмогоровских чтений], [Программа XIII Колмогоровских чтений]):

– Проблема воспитания пространственного мышления школьников (2006);

– Место математики в классическом образовании гуманитария (2007);

– Инновации в общеобразовательной школе и педагогическом образовании (2009);

– Что такое процент? (2010);

– Надпредметное содержание школьного курса математики (2011);

– Проблемы современного педагогического образования (2012);

– Математика для обывателя (2013);

– Компьютерная дидактика (2014);

– Некоторые проблемы школьного математического образования (2015).



Президиум Колмогоровских чтений 2009 года
в новом корпусе ЯГПУ
(крайний справа в Президиуме – Н.Х. Розов,
выступает В.В. Афанасьев)



Н.Х. Розов выступает с пленарным докладом
на Колмогоровских чтениях 2009 года



На Колмогоровских чтениях 2007 года
(выступает В.В. Вавилов)



Участники Колмогоровских чтений 2007 года

Николай Христович Розов внес неоценимый вклад в становление и развитие Колмогоровских чтений в их ярославский период. Чтения быстро завоевали авторитет в научно-педагогическом сообществе, стали удачной площадкой для сотрудничества, взаимодействия специалистов из самых разных регионов России и зарубежья, утвердились как конференция широкого спектра направлений, предназначенная для активного обсуждения фундаментальных проблем современной науки и образования, а также содействия в подготовке кадров высшей квалификации, в том числе через апробацию исследований молодыми учёными.

В 2016 г. основными постоянными организаторами было принято решение расширить географию проведения чтений и в дальнейшем проводить их в разных городах страны. С тех пор они состоялись в городах Коряжма (2017), Арзамас (2019), Кострома (2021), Киров (2023), Тверь (2025).

Следует также отметить, что визиты Н.Х.Розова в Ярославский педагогический были связаны не только с участием в Колмогоровских чтениях. В частности, они были связаны с работой в диссертационном совете ЯГПУ по педагогическим наукам, членом которого Николай Христович состоял более 10 лет.



Н.Х. Розов с супругой, В.В. Афанасьев, Л.Д. Кудрявцев и Е.Н. Квасовец в кабинете ректора ЯГПУ (2005)



Н.Х. Розов, В.В. Афанасьев, Д.В. Аносов, М.В. Новиков, Е.И. Смирнов и Е.Н. Квасовец у здания пансионата «Прибрежный» – места проведения V Всероссийской школы по истории математики (1999), явившейся ранним предвестником Колмогоровских чтений

В заключение хочется отметить, что Николай Христович всегда поощрял исследования в таких областях, как теория вероятностей, теория графов, фрактальная геометрия, качественная теория дифференциальных уравнений и др., проводящихся многие годы на ярославской земле, живо интересовался последними достижениями ярославцев в этих направлениях, а по возможности и принимал активное участие, оказывая в том числе разноплановую поддержку, вплоть до оппонирования диссертаций.

Светлая память о выдающемся педагоге, ученом, организаторе, руководителе – Николае Христовиче Розове навсегда сохранится в наших сердцах.

Библиографический список

1. Программа IV Колмогоровских чтений. Ярославль, ЯГПУ, 2006.
2. Программа V Колмогоровских чтений. Ярославль, ЯГПУ, 2007.
3. Программа VII Колмогоровских чтений. Ярославль, ЯГПУ, 2009.
4. Программа VIII Колмогоровских чтений. Ярославль, ЯГПУ, 2010.
5. Программа IX Колмогоровских чтений. Ярославль, ЯГПУ, 2011.
6. Программа X Колмогоровских чтений. Ярославль, ЯГПУ, 2012.
7. Программа XI Колмогоровских чтений. Ярославль, ЯГПУ, 2013.
8. Программа XII Колмогоровских чтений. Ярославль, ЯГПУ, 2014.
9. Программа XIII Колмогоровских чтений. Ярославль, ЯГПУ, 2015.

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 372.851

Г.Ю. Буракова, Т.Н. Карпова

Элективные курсы по математике в школе: традиции и инновации

Элективные курсы по математике в школе позволяют расширить и углубить знания учащихся, повысить уровень познавательной активности, творческий потенциал, реализовать индивидуальные образовательные потребности. Современные элективные курсы сохранили в себе лучшие традиции факультативов и строятся с учетом цифровизации образования и развитием искусственного интеллекта. В статье приведены примеры тем элективных курсов и видов итоговых занятий.

Ключевые слова: *элективные курсы по математике в школе, факультативы, тематика элективных курсов, использование информационно-коммуникационных технологий, итоговые занятия элективных курсов.*

G. Yu., Burakova, T. N. Karpova

Elective math courses at school: traditions and innovations

Elective math courses at school make it possible to expand and deepen students' knowledge, increase the level of cognitive activity, creativity, and realize individual educational needs. Modern elective courses have preserved the best traditions of electives and are built in view of digitalization of education and development of artificial intelligence. The article provides examples of elective course topics and types of final classes.

Keywords*: elective courses in mathematics at school, electives, elective course thematics, the use of information and communication technologies, final classes of elective courses.*

При обучении математике в школе для учащихся должны быть созданы условия, позволяющие реализовать их творческий

потенциал, индивидуальные образовательные потребности и достижения. Для этого необходимо осуществлять проектирование развивающей образовательной среды, направленной на поддержание интереса учащихся к учебному предмету с помощью его углубленного изучения.

В конце шестидесятых годов XX века в средней общеобразовательной школе появились новые формы групповых занятий по математике, предназначенные только для желающих, – факультативы. Факультативные занятия имели единую программу, четкое место в расписании школы, способствовали повышению и углублению уровня знаний по выбранному направлению и формированию умений решать более сложные задачи, чем на уроках. С течением времени в связи с реформами семидесятых – восьмидесятых годов, происходящими в образовании, изменялись программы, методика преподавания. Учителя получили возможности самостоятельно выбирать программы факультативных курсов, имеющих целью довести изучаемые на уроках темы до логического завершения и продемонстрировать их связи с соответствующими разделами науки и различными приложениями. Часть разделов, изучаемых на факультативах, вошла в школьные учебники, например, темы «Предел и непрерывность», «Производная и интеграл», «Начала теории вероятностей с элементами комбинаторики», «Геометрические преобразования плоскости и их приложения», «Комплексные числа и многочлены» и др. [Избранные вопросы …, 1980].

В начале девяностых годов основным направлением развития общего среднего образования стала дифференциация обучения, затронувшая в том числе и факультативы, которые предусматривались, начиная с 7 класса. В старших классах основное внимание уделялось решению задач повышенной сложности и подготовке учащихся к продолжению образования, к сдаче вступительных экзаменов в вузы.

В двухтысячных годах в школьные образовательные программы помимо факультативных (необязательных для данного уровня образования) были включены элективные курсы, избираемые в обязательном порядке в соответствии с профилем класса

и на основе собственных интересов учащихся [Российская Федерация …, 2012].

Целью элективных, как и факультативных курсов, является углубление знаний школьников, развитие их познавательных интересов, творческих способностей, склонностей. В отличие от факультативов элективные курсы выбираются каждым учеником из предложенного избыточного количества курсов, они включены в общее расписание, как и остальные уроки.

На элективных занятиях не повторяется, а расширяется и углубляется программа основных учебных курсов и реализуется проектная, учебно- исследовательская, творческая деятельность учащихся, играя тем самым важную роль в системе профильного обучения в старших классах [Донцова, 2018].

Традиционными темами элективных курсов являются «Функции, их графики и применение», «Приемы и методы решения планиметрических (стереометрических) задач», «Методы решения иррациональных (показательных, логарифмических, тригонометрических) уравнений и неравенств», «Избранные вопросы математики», «Практикум по решению задач повышенной сложности», «Подготовка к ЕГЭ по математике профильного уровня» и др.

В связи с цифровизацией образования, развитием искусственного интеллекта возникают не только новые темы элективов, но и появляются возможности использования инновационных технологий на занятиях. К новым темам можно отнести следующие: «Математические основы искусственного интеллекта», «История математики и ее вклад в развитие искусственного интеллекта», «Математические основы кодирования и шифрования», «Основы криптографии» и др. [Яшина, 2025].

В настоящее время большинство традиционных элективных курсов реализуется с использованием информационно-коммуникационных технологий, цифровых образовательных ресурсов, различных программных сред, графических редакторов, образовательных платформ. Например, ИКТ используются при изучении следующих курсов: «Графические модели в алгебре и геометрии» (для учащихся инженерно-технического профиля подго-

товки), «Построение сечений с использованием ИКТ», «Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции в математике и экономике с применением Microsoft Excel» (для классов социально-экономического профиля), «Использование программы GeoGebra при решении задач с параметрами», «Геометрические преобразования в задачах на доказательство и построение» и др.

Использование средств информационно-коммуникационных технологий при проведении элективных курсов способствует развитию цифровой грамотности и адаптации к современному информационному обществу, позволяет повысить уровни индивидуализации, дифференциации и мотивации. Учащиеся имеют возможность выбирать задания разного уровня, самостоятельно продвигаться по темам, возвращаться в случае необходимости к ранее изученному.

Итоговые занятия современных элективных курсов проводятся по-разному: в виде уроков одной задачи, в виде защиты проектов, прохождении квестов, игр, представлении выполненных индивидуальных учебно-исследовательских заданий и др.

Например, конечным итогом элективного курса «Графические модели в алгебре и геометрии» являются проекты, связанные с применением динамической математической программы GeoGebra при решении уравнений и неравенств, решении сложных геометрических задач, в том числе на построение сечений.

Элективный курс «Приемы и методы решения планиметрических задач» заканчивается занятием в формате «Своя игра» по геометрическим задачам повышенного уровня сложности, в которой реализуются межпредметные связи по геометрии, географии, алгебре и физике.

При изучении элективного курса «Задачи с параметрами как средство математического моделирования и развития графической культуры учащихся» школьники выполняют индивидуальные учебно-исследовательские задачи, связанные с обобщением свойств функций, и защищают их на итоговом занятии.

В рамках данного курса учащимся предлагается преобразовать типовую задачу, заменив переменную x на различные функции, и проанализировать изменение решения.

Типовая задача. При каких значениях параметра a уравнение $(a-1)x^2+(2a-3)x-3a+4=0$ имеет единственное решение?

Составленные задачи:

1) При каких значениях параметра a уравнение

a) $(a-1)\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2+(2a-3)\log_{\frac{1}{2}} x-3a+4=0$,

b) $(a-1)4^{\mathrm{x}}+(2a-3)6^{\mathrm{x}}=(3a-4)9^{\mathrm{x}}$,

c) $(a-1)(4x-x^2-2)^2+(2a-3)(4x-x^2-2)-3a+4=0$

имеет единственное решение?

2) При каких значениях параметра a уравнение $(a-1)cos^2x+(2a-3)cosx=3a-4$ имеет решение?

Полученные задачи решаются аналитическим и графическим методами, в частности с использованием программы GeoGebra.

Одной из форм проведения занятий на элективных курсах является урок одной задачи. Так, при изучении курса «Методы решения иррациональных уравнений и неравенств» учащимся было предложено решить разными способами неравенство $\sqrt{-x^2+8x-15}+3\geq x$, в результате были найдены пять способов решения. На завершающем занятии курса рассматривалась система неравенств с параметрами, в которой каждое последующее неравенство было получено путем преобразования предыдущего, требовалось их решить или указать, при каких значениях параметра неравенство имеет хотя бы одно решение:

1) $\sqrt{-x^2+8x-15}\geq a$;
2) $\sqrt{-x^2+8x-15}\geq ax$;
3) $\sqrt{-x^2+8x-15}\geq ax-1$;
4) $\sqrt{-x^2+8x-15}\geq a(x-4)-3$.

Неравенства предлагалось решить графическим способом с использованием программы GeoGebra, дающей наглядно-графическую иллюстрацию решения, помогающей избежать громоздких преобразований и ускорить процесс нахождения ответа.

Занятия элективных курсов могут быть составлены с использованием нейросети, которая может предоставить их базу, структурировать материал, выделить некоторые типы задач. При этом учитель должен грамотно сформулировать задание и, проанализировав полученный результат, внести необходимые коррективы.

Таким образом, современные элективные курсы по математике в школе сохранили имеющиеся традиции и опыт реализации факультативных и элективных курсов, и вместе с тем приобрели новые характерные черты, связанные с использованием инновационных средств и методов обучения.

Библиографический список

1. Донцова М.А. Опыт организации элективных курсов по математике в старших классах // Современные проблемы науки и образования. – 2018. – № 2. – URL: http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=27523 (дата обращения: 10.07.2025).

2. Избранные вопросы математики: 10 кл. Факультативный курс / А.М. Абрамов, Н.Я. Виленкин, Г.В. Дорофеев и др.; Сост.: С.И. Шварцбурд. – Москва: Просвещение, 1980. – 191 с.

3. Российская Федерация. Законы. Об образовании в Российской Федерации: Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ [Электронный ресурс]. – Режим доступа**:** https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_140174/ (дата обращения: 10.07.2025).

4. Яшина Е.Ю., Боткина М.Н. Элективный курс «Основы криптографии» для учащихся 8-9 классов как средство повышения познавательного интереса при обучении математике // Современные проблемы математики и математического образования: Сборник научных работ, представленных на Международную научную конференцию «78 Герценовские чтения» / под ред. В.В. Орлова и М.Я. Якубсона. – СПб.: Издательско-полиграфическая ассоциация высших учебных заведений, 2025. С. 65-68.

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 378

Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина, Д. В. Широков

Два доказательства законов дистрибутивности для НОД и НОК

В статье предложены два доказательства дистрибутивности бинарных операций взятия НОД и НОК относительно друг друга на множестве целых чисел **Z**. Используемые в них методы перенесены на два способа доказательства тождеств, связывающих НОД и НОК трех чисел.

Ключевые слова: *теория чисел, дистрибутивный закон, НОД, НОК.*

E. M. Vechtomov, E. N. Lubyagina, D. V. Shirokov

Two proofs of distributivity laws for GCD and LCM

The article proposes two proofs of the distributivity of the operations of taking GCD and LCM relative to each other on the set of integers **Z**. The methods used in them are transferred to two methods of proving identities that connect the GCD and LCM of three numbers.

Key words: *number theory, distributive law, GCD, LCM.*

Введем необходимые определения и утверждения (см. также [1]).

Отношение *делит* | определяется условием

$$b \mid a \Leftrightarrow \exists c \in \mathbf{Z}\colon a = bc.$$

Число b называется *делителем* a (a *делится на* b), число a – *кратным* b.

Наибольшим общим делителем (НОД) множества целых чисел $\{a_1, \ldots, a_n\}$, среди которых есть ненулевое число, называется наибольший их общий делитель, обозначаемый $(a_1, \ldots, a_n)$. Считаем, что $(0, \ldots, 0) = 0$. *Наименьшее общее кратное* (НОК) $[a_1, \ldots, a_n]$ множества ненулевых целых чисел – это их наименьшее натуральное общее кратное. Считаем, что $[0, a_1, \ldots, a_n] = 0$.

Следующие свойства выполняются для любых целых чисел, классические доказательства большинства из них можно найти в книгах [2, 3]:

С1. *Отношение делит* | *рефлексивно* ($a \mid a$) и *транзитивно* ($b \mid a$ & $a \mid c \Rightarrow b \mid c$).

С2. $b \mid a$ & $a \neq 0 \Rightarrow |b| \leq |a|$. *В частности,* $b \mid 1 \Leftrightarrow b = \pm 1$.

С3. $|d| = (a,b) \Leftrightarrow$ *d делит числа a и b, и d делится на любой их общий делитель.*

С4. $(a, b) = 1 \Leftrightarrow az_1 + bz_2 = 1$ *для некоторых* $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}$.

С5. $(a, b) = 1 \Rightarrow ((a, c), (b, c)) = 1$.

Доказательство. Так как $(a, b) = 1$ и по С3 $(b, c) \mid b$, $(a, c) \mid a$, то по С4 $1 = az_1 + bz_2 = (a, c)z_1z_3 + (b, c)z_2z_4$ для $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{Z}$, поэтому $((a, c), (b, c)) = 1$.□

С6. $(a, b) = d \Leftrightarrow (a/d, b/d) = 1$ *для* $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $d > 0$. *Кроме того* $(a, b) = d(a/d, b/d)$.

С7. $(a, b) = 1$ & $c \mid a \Rightarrow (c, b) = 1$.

Доказательство. Так как $c \mid a$, то по С1 делители числа c делят a. Тогда в силу С3 $(c, b) \mid (a, b) = 1$. Итак, по С2 $(c, b) = 1$.

С8. $(a, b) = 1 \Rightarrow (ca, b) = (c, b)$.

С9. $(a, b) = 1 \Rightarrow (c, ab) = (c, a)(c, b)$.

Доказательство. Если $b = c = 0$, то по условию $a = 1$, поэтому $(0, 1 \cdot 0) = (0, 1)(0, 0)$.

Если $b \neq 0$ или $c \neq 0$, то по С6 $\left(\frac{b}{(c,b)}, \frac{c}{(c,b)}\right) = 1$. Так как $(b, a) = 1$ и $(c, b) \mid b$, то по С7 $((c, b), a) = 1$ и по С8 $\left(\frac{ab}{(c,b)}, \frac{c}{(c,b)}\right) = (a, \frac{c}{(c,b)}) = (a, \frac{(c,b)c}{(c,b)}) = (a, c)$. Тогда в силу С6 получим, что $(ab, c) = (c, b)(a, c)$.

С10. $[a, b] = \frac{|ab|}{(a,b)}$ *в случае, когда* $a \neq 0$ *или* $b \neq 0$.

Опираясь на указанные свойства докажем законы дистрибутивности бинарных операций взятия НОД и НОК относительно друг друга.

Теорема 1. *На множестве целых чисел* **Z** верны тождества:
$(a, [b, c]) = [(a, b), (a, c)]$ *и* $[a, (b, c)] = ([a, b], [a, c])$.

Доказательство. Если $b=c=0$, то $(0, [0, 0]) = 0 = [(0, 0), (0, 0)]$.

Пусть $b\neq 0$ или $c\neq 0$. Обозначим: $d = (a, (b, c))$, $a_1 = \frac{a}{d}$, $d_1 = \frac{(b,c)}{d}$, $b_1 = \frac{b}{(b,c)}$, $c_1 = \frac{c}{(b,c)}$. Тогда $(a_1, d_1) = 1 = (b_1, c_1) \overset{C5}{==} ((a_1, b_1), (a_1, c_1))$, $dd_1b_1=b$, $dd_1c_1=c$ и

$$(a, [b, c]) \overset{C10}{==} (a, \frac{|bc|}{(b,c)}) = (a, \frac{bc}{(b,c)}) = (a, (b, c) \cdot \frac{b}{(b,c)} \cdot \frac{c}{(b,c)}) =$$
$$(a_1 d, d_1 d b_1 c_1) \overset{C6}{==} d(a_1, d_1 b_1 c_1) \overset{C8}{==} d(a_1, b_1 c_1) \overset{C9}{==} d(a_1, b_1)(a_1, c_1)$$
$$\overset{C8}{==} \begin{cases} d(a_1, d_1 b_1)(a_1, c_1) \\ d(a_1, b_1)(a_1, d_1 c_1) \end{cases} \overset{C6}{==} \begin{cases} (da_1, dd_1 b_1)(a_1, c_1) \\ (a_1, b_1)(da_1, dd_1 c_1) \end{cases} =$$
$$\begin{cases} (a, b)(a_1, c_1) \\ (a_1, b_1)(a, c) \end{cases}.$$

Преобразуем:

$$(a, [b, c])((a, b), (a, c)) \overset{C6}{==} ((a, [b, c])(a, b), (a, [b, c])(a, c)) =$$
$$((a_1, b_1)(a, c)(a, b), (a_1, c_1)(a, b)(a, c)) =$$
$$(a, b) \cdot (a, c) \cdot ((a_1, c_1), (a_1, b_1)) = (a, b) \cdot (a, c).$$

Значит, $(a, [b, c]) = \frac{(a,b)\cdot(a,c)}{((a,b),(a,c))} \overset{C10}{==} [(a, b), (a, c)]$.

Доказательство равенства $[a, (b, c)] = ([a, b], [a, c])$ проводится аналогично.

Второе доказательство законов дистрибутивности опирается на понятие простого числа и основную теорему арифметики.

Натуральное число p называется *простым*, если имеет только два натуральных делителя $1\neq p$. *Порядок* $O_p(n)$ *вхождения* простого числа p в разложение натурального числа $n\neq 1$ – это такое наибольшее неотрицательное число s, что $p^s \mid n$:

$$s=O_p(n) \Leftrightarrow p^s \mid n \;\&\; p^{s+1} \nmid n.$$

Имеем: $O_p(nm)=O_p(n)+O_p(m)$ и $m \mid n \Rightarrow O_p(n/m)=O_p(n)-O_p(m)$.

Основная теорема арифметики [2]. *Любое натуральное число, большее 1, представляется в виде произведения простых чисел однозначно с точностью до порядка следования множителей.*

Основная теорема арифметики может быть сформулирована следующим образом: *любое натуральное число* $n \neq 1$ *представимо в виде произведения степеней* $p^{O_p(n)}$ *по всем простым* p:

$n = \prod_{p \text{ - прост.}} p^{O_p(n)}$. Для числа 1 получаем аналогичное разложение

$1 = \prod_{p \text{ - прост.}} p^0$.

С11. *Для любых натуральных чисел* $a_1, \ldots, a_n$:

$$(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{p \text{ - прост.}} p^{\min(O_p(a_1),\ldots O_p(a_n))} \text{ и } [a_1, \ldots, a_n] = \prod_{p \text{ - прост.}} p^{\max(O_p(a_1),\ldots O_p(a_n))}.$$

Другое доказательство теоремы 1. Будем считать, что a, b, c неотрицательны, поскольку НОД и НОК не зависят от знаков аргументов.

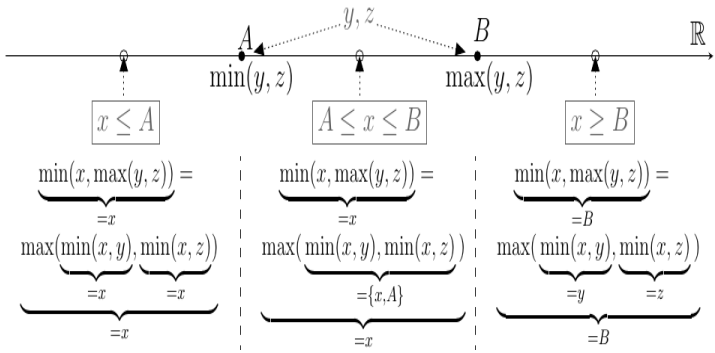
Так как $(0, z) = z$ и $[0, z] = 0$, то:

- $a = 0 \Rightarrow (0, [b, c]) = [b, c] = [(0, b), (0, c)]$ и $[0, (b, c)]) = 0 = ([0, b], [0, c])$.
- $b = 0 \Rightarrow (a, [0, c]) = a = [(a, 0), (a, c)]$ и $[a, (0, c)] = [a, c] = ([a, 0], [a, c])$.
- $c = 0 \Rightarrow (a, [b, 0]) = a = [(a, b), (a, 0)]$ и $[a, (b, 0)] = [a, b] = ([a, b], [a, 0])$.

Пусть a, b, c положительны. Зафиксируем произвольное простое число p. Обозначим $n = (a, [b, c])$, $m = [(a, b), (a, c)]$, $x = O_p(a)$, $y = O_p(b)$, $z = O_p(c)$. В силу С11

$$O_p(n) = \min(O_p(a), O_p([b, c])) = \min(O_p(a), \max(O_p(b), O_p(c))) \text{ и}$$
$$O_p(m) = \max(\min(O_p(a), O_p(b)), \min(O_p(a), O_p(c))).$$

Тогда $O_p(n) = \min(x, \max(y, z)) \overset{(*)}{=} \max(\min(x, y), \min(x, z)) = O_p(n) \Rightarrow n = m$. При этом тождество (*) верно для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$, а для его проверки достаточно рассмотреть следующие случаи, обозначив $A = \min(y, z)$ и $B = \max(y, z)$:



Доказательство двойственного дистрибутивного закона $[a, (b, c)] = ([a, b], [a, c])$ опирается на тождество

$$\max(x, \min(y, z)) = \min(\max(x, y), \max(x, z)),$$

которое получается из тождества (*) взаимной заменой max и min (то есть направления числовой оси) и верно в силу аналогичных рассуждений.

Как следствие получаем следующее свойство

С12. *Для ненулевых чисел верны равенства*

$$[a, b, c] = \frac{|abc|(a,b,c)}{(a,b)(a,c)(b,c)} \text{ и } (a, b, c) = \frac{|abc|[a,b,c]}{[a,b][a,c][b,c]}.$$

Доказательство. 1 способ. Будем использовать обозначения и результаты доказательства законов дистрибутивности, в том числе равенство

$$(a, [b, c]) = d(a_1, d_1b_1)(a_1, c_1) = d(a_1, d_1b_1)(a_1, d_1c_1):$$

$$[a, b, c] = [a, [b, c]] = \frac{|a|[b, c]}{(a, [b, c])} = \frac{|a|\cdot|bc|/(b, c)}{d(a_1,d_1b_1)(a_1,d_1c_1)} =$$

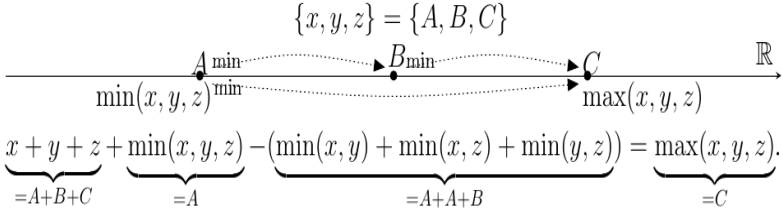
$$= \frac{|abc|d}{d(a_1, d_1b_1)d(a_1, d_1c_1)(b,c)} = \frac{|abc|(a, b, c)}{(a, b)(a, c)(b, c)}.$$

2 способ. В силу условия $[a, b, c]$ и $\frac{|abc|(a,b,c)}{(a,b)(a,c)(b,c)}$ – натуральные числа.

Зафиксируем произвольное простое число p. Обозначим $n=[a, b, c]$ и $m=\frac{abc(a,b,c)}{(a,b)(a,c)(b,c)}$, $x=O_p(a)$, $y=O_p(b)$, $z=O_p(c)$. По свойству С11 получаем:

$$O_p(n)=\max(O_p(a), O_p(b), O_p(c)),$$
$$O_p(m)=O_p(a)+O_p(b)+O_p(c)+O_p((a,b,c))-O_p((a,b))-O_p((a,c))-O_p((b,c))=$$
$$O_p(a)+O_p(b)+O_p(c)+\min(O_p(a),O_p(a),O_p(c))-\min(O_p(a),O_p(a))-\min(O_p(a),O_p(c))-\min(O_p(b),O_p(c)).$$

Тогда $O_p(m)=x+y+z+\min(x, y, z)-(\min(x, y)+\min(x, z)+\min(y, z)) \overset{(*)}{=} \max(x, y, z)=O_p(n)$ и, значит, $n=m$. Для обоснования равенства (*) воспользуемся иллюстрацией:



Доказательство второго тождества получается из предыдущего взаимной заменой НОД и НОК и опирается на тождество, двойственное (*):

$x+y+z+\max(x, y, z)-(\max(x, y)+\max(x, z)+\max(y, z)) = \min(x, y, z)$.

Библиографический список

1. Вечтомов, Е.М. Основы теории делимости / Е.М. Вечтомов // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2002. – № 4. – С. 61-73.

2. Виноградов, И.М. Основы теории чисел / И.М. Виноградов. – Москва: Издательство Юрайт, 2025. – 123 с.

3. Ильиных, А.П. Теория чисел: Учебное пособие. Екатеринбург: Издательство: Урал. гос. пед. ун-т, 2003. – 149 с.

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 372.851

М.Ф. Гильмуллин

Историко-математические задачи в системе диалога культур

Решение старинных задач является одной из форм историко-математической деятельности обучающихся. Мы рассматриваем их не только как реализацию принципа историзма в обучении математике в школе и вузе. В этом процессе происходит культуросообразное обучение в различных формах диалога культур.

Ключевые слова: *история математики, старинные задачи, историография задач, диалог культур.*

M.F. Gilmullin

Historical and mathematical problems in the system of cultures dialogue

Solving ancient problems is one of the forms of historical-mathematical activity for students. We consider them not only as an implementation of historicism principle in teaching mathematics at school and university. This process facilitates culturally appropriate learning through various forms of cultural dialogue.

Key words: *history of mathematics, ancient problems, historiography of problems, dialogue of cultures.*

В методике обучения математике для достижения различных результатов обучения одной из форм историко-математической деятельности учащихся считается решение старинных задач [1, 4]. В разделе школьной программы «Математика в историческом развитии» специально упоминаются следующие исторические задачи: задача Фибоначчи о кроликах, задача о шахматной доске, построение с помощью циркуля и линейки, построение правильных многоугольников, золотое сечение.

Различным сторонам методики работы с ними посвящено множество работ. И.А. Михайлова [6] разработала критерии отбора задач, содержащих элементы историзма: критерий вариативности решения задачи; органичности (ее соответствия изучаемой теме); достаточной компетентности учащихся в фабуле задачи; совершенствования получаемых знаний (способствование полноте, системности и осознанности); дополнительности получаемой информации; мотивационной привлекательности задачи.

Учителям рекомендуется изучить формы работы с историческими задачами. Они должны сопровождаться историко-математическими экскурсами. Учитель должен ориентироваться в «историографии» старинных задач. Этот термин нами используется в смысле совокупности исследований, посвященных истории математических задач. В первую очередь, учителей должна интересовать история задач из школьных учебников. В современных учебниках таких сведений очень мало. Кое-что известно только об именных задачах и теоремах.

Но обычно игнорируются авторские права математиков прошлого. Известные старинные задачи переходят из одного задачника в другой, при этом имена авторов теряются. Например, задача о точке пересечения медиан треугольника была решена Архимедом, но его имя не упоминается ни в одном учебнике при формулировке этой задачи. Задача Герона о равенстве отрезков касательных, проведенных к окружности из внешней точки, не носит его имени. Задача «Высоты треугольника пересекаются в одной точке» должна называться задачей Регионтана.

Для изучения историографии задач в рамках курса истории математики будущие учителя используют различные источники: это учебники и хрестоматии по истории математики, пособия для учителей, материалы историко-математических исследований в периодических изданиях, научно-популярную литературу. Студенты выполняют задания, которые раскрывают авторство задачи, историю и хронологию ее решения, истоки и дальнейшее ее использование.

По нашему мнению, исследование истории постановки задач и их решения имеют более глубокие, культурологические цели.

Достижение целей обучения математике возможно только при ясном представлении культуросообразной роли математики. Ю. А. Дробышев [5] утверждает, что оно может быть реализовано лишь при активном использовании принципа историзма. Он предлагает следующие изменения в обучении математике в школе: отбор содержания математики, исходя из ее значения в формировании общей культуры человека; осмысление вместе с учащимися диалога культур в математике; отражение культурного развития человечества в математических системах.

Но принцип историзма не покрывает культуросозидающую роль образования [2]. Современная философия образования нацеливает на новые установки, которые объявляют приоритетом человеческую личность, развитие ее творческого потенциала, идеи мультикультурности, развитие способности к диалогу культур.

Основным условием и, одновременно, педагогическим средством такого обучения и воспитания должен стать диалог культур, подразумевающий взаимодействие и взаимовлияние культур учителя и ученика, преподавателя и студента (М.М. Бахтин, В.С. Библер) [7]. Материализованным носителем и своеобразным «запускающим механизмом» диалога культур является произведение культуры, специально для этого подобранное и преподнесенное обучающимся в соответствующей форме. Одной из таких форм в условиях обучения математике и истории математики могут быть историко-математические задачи.

Проектируя понимание культуры на процесс обучения математике, выделяются и с разной степенью полноты рассматриваются следующие формы диалога культур:

– диалог математико-образовательных продуктов (текстов), создаваемых преподавателем и студентом, учителем и учеником;

– материализованное в исследовательском диалоге взаимодействие пар преподаватель-студент, учитель-ученик, студент-студент;

– исследовательский диалог как форма общения учащегося и автора каких-либо материалов (историческая персона, автор учебника или какого-либо текста).

В числе методических средств такого обучения выделим следующие:

– школьная математика, рассматриваемая как отражение грани культуры и потому предоставляющая учащимся наработанные в этой культуре средства ориентировки в окружающем мире (прежде всего, такие идеальные объекты как числа, геометрические фигуры), а также способы их освоения. К ним следует отнести способы их преобразования и действия с ними, способы фиксации своих мыслей и действий, некоторые процедуры математического творчества и движения к истине, а именно: обращение операций, отношений, задач; процедура моделирования; конструирование новых математических объектов из известных;

– диалог культур в аспекте личности, рассматриваемый нами как интеллектуальное общение конкретных носителей культуры, организованное в парах на базе некоторого произведения культуры. Диалог организуется таким образом, что приводит его участников к созданию нового для них произведения культуры. К ним могут и должны быть отнесены появившиеся рисунки, мысли, утверждения и версии.

Таким образом, в культурологическом подходе к образованию его важнейшей задачей считается не просто дать обучающемуся набор норм (на уровне знаний и умений), а помочь ему осмыслить информацию, принять основные ценности как собственные жизненные ориентиры и научиться использовать их практически [3].

Покажем на конкретном примере анализа историографии задачи работу в формате диалога культур.

Головоломку «36 офицеров», согласно легенде, предложила знаменитому математику Леонарду Эйлеру императрица Екатерина Великая: «Необходимо разместить 36 офицеров шести различных полков и шести различных воинских званий в квадрат так, чтобы в каждой колонне и в каждом ряду был ровно один офицер каждого полка и каждого воинского звания».

Академик Эйлер бился с этой задачей долго. Он сумел решить ее для 25 офицеров. Но после безуспешных поисков решения для случая с 36 офицерами Эйлер пришел к выводу, что «такое расположение невозможно, хотя мы и не можем дать строгого

доказательства этого». Таким образом, возникла ещё одна математическая гипотеза. В дальнейшем этой задачей занимались тысячи математиков. Только в 1959 году было доказано, что эта задача решается для любых квадратных чисел, больших, чем 2×2. Любых, кроме тридцати шести. Математики использовали компьютеры, чтобы доказать, что решения существуют для любого количества полков и рангов больше двух, за исключением случая шести. Задача Эйлера о 36 офицерах положила начало изучению этих объектов как «латинских квадратов» [8].

При анализе этой задачи мы выходим на все формы диалога культур: диалог как форма общения учащегося и Эйлера, взаимодействие пары преподаватель-студент. Диалог приводит его участников к созданию нового для них произведения культуры. В результате их диалога появляются рисунки, утверждения о новых объектах – латинских квадратах.

Библиографический список

1. Гильмуллин М.Ф. Формирование исторического компонента математико-методической культуры студентов при обучении истории математики в педагогическом вузе: дис. …канд. пед. наук / Гильмуллин Мансур Файзрахманович. Ярославль, 2009. 230 с.

2. Гильмуллин М.Ф. Культурологический подход в обучении математике и истории математики / М.Ф. Гильмуллин // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Выпуск 12: Периодический межвузовский сборник научно-методических работ. Киров: Вят ГГУ, 2010. – С. 6-14.

3. Гильмуллин М.Ф. Диалог культур в обучении математике / М.Ф. Гильмуллин, А.Л. Жохов // Труды IX международных Колмогоровских чтений: сборник статей. Ярославль: ЯГПУ, 2011. С. 136-138.

4. Гильмуллин М.Ф. Роль задач в методической системе обучения истории математики / М.Ф. Гильмуллин // Задачи в обучении математике, физике и информатике: теория, опыт, инновации: материалы II Международной научно-практической конференция, посвященной 125-летию П.А. Ларичева. Вологда: ИП Киселёв А.В., 2017. С. 83-86.

5. Дробышев Ю.А. О роли принципа историзма в реализации культурологического подхода к изучению математики в школе / Ю.А. Дробышев // Содержание и методы обучения математике на рубеже столетий: тезисы докладов XVIII Всерос. семинара преп. матем. ун-в и пед. вузов. Брянск, 1999. С. 18-19.

6. Михайлова И.А. Отбор задач, содержащих элементы историзма, в рамках технологии историзации школьного математического образования / И.А. Михайлова // Актуальные проблемы подготовки будущего учителя математики: межвуз. сб. науч. тр.; под ред. Ю.А. Дробышева и И.В. Дробышевой. Калуга, 2006. Вып. 8. С. 45-47.

7. Библер В.С. От наукоучения – к логике культуры: Два философских введения в XXI век. М.: Политиздат,1990. 413 с.

8. Малых А.Е. О создании Эйлером комбинаторной теории латинских квадратов / А.Е. Малых // Историко-математические исследования. 1983. Вып. 27. С. 102-123.

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 53(072)(043.3)

М.В. Евланов

Сюжетные задачи по физике как средство формирования технико-конструкторских умений учащихся

Статья посвящена анализу дидактического потенциала сюжетных задач по физике как средства формирования технико-конструкторских умений учащихся. Рассматривается пример сюжетной задачи по учебному предмету «Физика» в контексте формирования технико-конструкторских умений учащихся.

Ключевые слова: *технико-конструкторские умения, сюжетные задачи, моделирование физических процессов, учебный предмет «Физика».*

M.V. Evlanov

Story-based problems in physics as a means of developing students' technical and design skills

The article is devoted to the analysis of the didactic potential of plot problems in physics as a means of developing students' technical and design skills. An example of a plot problem in the subject «Physics» is considered in the context of developing students' technical and design skills.

Key words: *technical and design skills, plot problems, modeling of physical processes, academic subject «Physics».*

Формирование технико-конструкторских умений учащихся в образовательном процессе способствует развитию научно-технического прогресса, обеспечивающего создание новой техники, технологий, а также профессиональной ориентации в ключе подготовки будущих специалистов инженерно-технических специальностей.

Анализ работы в учреждении общего среднего образования показывает, что значительные возможности для развития техни-

ческого мышления и возможности формирования технико-конструкторских умений учащихся, а также их творческих способностей дает специально организованная работа по решению сюжетных задач, что позволяет сделать свободный поиск необходимой информации, а при наличии соответствующего оборудования и материалов, сконструировать тот или иной физический/технический объект для решения конкретной сюжетной задачи [1, 2].

По мнению Л.П. Фридмана, под сюжетной задачей понимают задачи, в которых описан некоторый жизненный сюжет (явление, событие, процесс) с целью нахождения определенных количественных характеристик или значений [3]. В отличие от абстрактных задач, сюжетные задачи требуют от учащихся не только применения физических законов, но и анализа условий, выбора оптимального способа решения и интерпретации результатов в контексте поставленной проблемы.

Сюжетные задачи интегрируют знания учащихся из разных областей, моделируют практические и инженерно-технологические ситуации, активизируют творческое мышление и мотивацию к изучению предмета. Решение таких задач требует от учащихся не только критического и логического мышления, но и элементарных навыков технического моделирования, анализа технических условий, а также способности к самостоятельному поиску решений.

Собственные исследования и анализ литературы указывает на большой дидактический потенциал сюжетных задач в формировании технико-конструкторских умений, их решение полностью соответствует логике выполнения технико-конструкторских заданий и включает следующие этапы: 1. формулирование технико-конструкторского задания; 2. создание графической модели; 3. сборка технической конструкции; 4. апробация технической конструкции [2].

Пример задачи «Angry birds» (физика, 9 класс, «Движение тела под углом к горизонту»). Во время игры «Angry birds» игроку необходимо попасть в цель из катапульты, запустив птицу под определенным углом к горизонту. Смоделируйте данный процесс с помощью любой компьютерной программы (например, «1С: Физический конструктор») и рассчитайте параметры движения птицы (снаряда), а также определите, под каким углом и с

какой начальной скоростью нужно её запустить, чтобы попасть в цель (рисунок).

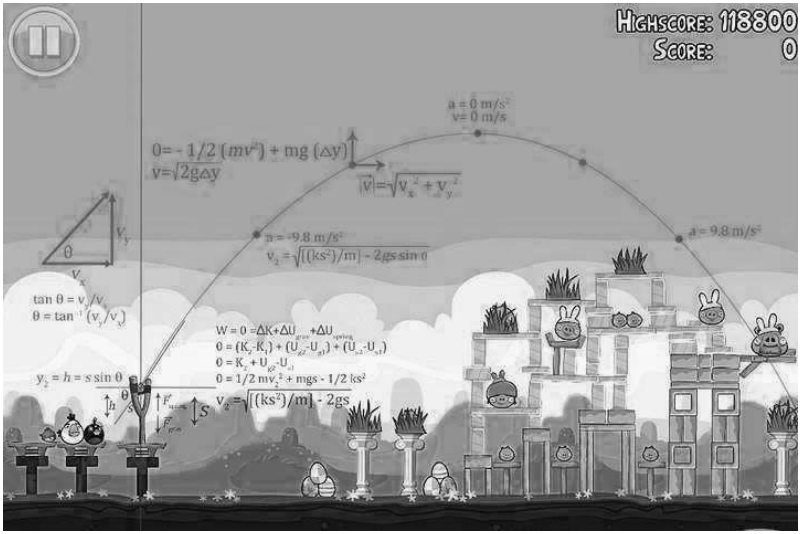


Рисунок – Применение физики в игре «Angry birds»

В качестве альтернативного варианта можно предложить учащимся спроектировать и собрать катапульту, которая сможет запускать теннисный мяч на расстояние не менее 5 метров. Катапульта должна быть изготовлена из доступных материалов (например: деревянные рейки, резинки, пластиковые бутылки, клей и т.д.). Учащиеся должны рассчитать силу натяжения, угол запуска и массу снаряда, чтобы достичь требуемой дальности.

1 этап. Формулирование технико-конструкторского задания.

Разработать конструкцию катапульты, используя знания о законах механики (законы Ньютона, законов сохранения энергии и импульса); рассчитать параметры запуска (угол, силу натяжения) для достижения заданной дальности; собрать работающую модель и протестировать её.

2 этап. Создание графической модели.

Учащиеся создают схематический чертёж катапульты, указывая основные элементы: основание (стабильная платформа);

рычаг (длина и точка крепления); резинка (сила натяжения); угол запуска (регулируемый механизм).

3 этап. Сборка технической конструкции.

Учащиеся собирают необходимые материалы (деревянные рейки, резинки, пластиковые детали, клей, инструменты), собирают установку.

4 этап. Апробация технической конструкции.

Проведение эксперимента учащимися. Предложен альтернативный вариант корректировки рассматриваемой схемы устройства для увеличения точности измерений.

Таким образом, применение сюжетных задач при изучении учебного предмета «Физика» являются мощным инструментом для формирования технико-конструкторских умений учащихся, способствуют развитию аналитического мышления, креативности, навыков моделирования, что в свою очередь способствует подготовки учащихся к решению реальных проблем и успешной профессиональной деятельности в будущем.

Библиографический список

1. Евланов, М.В. Приемы и методы формирования функциональной грамотности и технико-конструкторских умений, учащихся в обучении физике // Функциональная грамотность: вызовы, решения, эффективные практики: Материалы XXIII междунар. пед. чтений, посвящ. 80-летию Победы в Сталингр. битве, Году педагога и наставника в РФ, 200-летию со дня рожд. К.Д. Ушинского / Волгогр. гос. акад. последиплом. образования [и др.]; сост. Л.В. Максимова; науч. ред.: А.Н. Кузибецкий, Л.К. Максимов. – Волгоград, 2023. – С. 71-76.

2. Евланов, М.В., Кондратьева И.П. Технико-конструкторские умения как обобщенная система действий при выполнении экспериментальных учебных заданий // Фізіка: праблемы выкладання. – 2022. – № 1. – С. 6-13.

3. Фридман, Л.М. Сюжетные задачи по математике. История, теория, методика / Л.М. Фридман. – М., 2002. – 208 с.

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 51(091)

Е.А. Зайцев

От геометрии к аналитике: смена парадигм в математике XVII века

В статье изучается становление аналитического метода в математике XVII века. Рассматривается трансформация сложившегося в античной Греции геометрического метода в альтернативную методологию, характеризующуюся отказом от использования воображения и переходом к представлению о математике как совокупности формальных правил, которым подчиняются действия с символами. Анализируются идеи творца аналитической геометрии Декарта и создателя анализа бесконечно малых Лейбница.

Ключевые слова: *история математики XVII века, геометрический метод, аналитический метод, Декарт, Лейбниц.*

E.A. Zaytsev

From geometry to analytics: a paradigm shift in 17th-century mathematics

The article studies the development of the analytical method in mathematics in the 17th century. It examines the transformation of the geometric method developed in ancient Greece into an alternative methodology characterized by the rejection of imagination and the acceptance of the idea that mathematics is as a system of rules governing formal operations with symbols. The ideas of Descartes, the founder of analytical geometry, and Leibniz, the creator of calculus (in the analytical form), are analyzed.

Key words: *history of mathematics in the 17th c., geometric method, analytical method, Descartes, Leibniz.*

До начала XVII века теоретическая математика развивалась, в основном, в русле геометрического подхода. Логически строгий

и одновременно наглядный метод, позволявший доказывать теоремы и решать задачи, служил образцом (парадигмой) подлинно научного знания. Арифметика в этот период считалась не наукой, а искусством.

Геометрический метод практиковался греками в двух видах в зависимости от типа величин, к которым он применялся. К первому виду относились построения, касающиеся конечных величин – линий, поверхностей и тел. Он широко представлен в классических работах греческой математики – «Началах» Евклида и «Конических сечениях» Аполлония. Ко второй разновидности относилась построения, касающиеся бесконечно малых величин. Свое преимущественное развитие эта техника получила в работах Архимеда (метод исчерпывания).

Становление аналитического метода, которое происходило в XVII веке, началось с «перевода» ряда задач греческой геометрии на язык алгебраического символизма. Сначала, в середине столетия усилиями Декарта и Ферма некоторые результаты Евклида и Аполлония, трактующие о конечных величинах, были переведены на язык аналитической геометрии. В конце века аналогичную работу по отношению к инфинитезимальным методам Архимеда проделал Лейбниц, создав исчисление бесконечно малых (дифференциалов).

Основная идея, положенная в основу аналитики, состояла в том, чтобы заменить протяженные геометрические величины безразмерными алгебраическими символами, с которыми можно работать чисто формально, отвлекаясь от стоящего за ними геометрического содержания.

Основным недостатком геометрии древних Декарт считал то, что она «так ограничена рассмотрением фигур, что не может упражнять рассудок, не утомляя сильно воображение» («Рассуждение о методе» 1637) [Декарт 1989, с. 260].

Его аналитическая геометрия этого недостатка была лишена. В ней образы фигур использовались только для того, чтобы зафиксировать соответствие между величинами и соответствующими алгебраическими символами. В результате отношения между заданными и искомыми величинами оказывались выраженными при помощи уравнения. Для его решения и, значит,

нахождения искомой величины, достаточно было владеть несложными, чисто формальными приемами преобразований. Используя эти приемы (Декарт сравнивал их с инструментами ремесленника), всякий грамотный человек мог самостоятельно решать поставленные задачи.

Созданием аналитической геометрии Декарту удалось воплотить в области математики общую идею, которую он сформулировал в своих самых ранних философских работах. Идея эта состояла в том, чтобы предъявить ясный и простой метод научного исследования, который был бы доступен практически каждому. Вот что он писал в «Правилах для руководства ума» (1628):

«И во всем трактате мы, конечно, будем пытаться все пути, которые открыты людям к познанию истины, проследить столь тщательно и представить столь *легкими*, что всякий, кто в совершенстве изучит весь этот метод, каким бы *посредственным* умом он ни обладал, увидит тем не менее, что нет никаких путей, закрытых для него в большей степени, чем для других людей, и что он не останется больше в неведении о чем-либо по недостатку ума или умения» (курсив мой – *Е.З.*) [Декарт 1989, с. 105].

Идею «демократической» математики разделяли ближайшие последователи Декарта, в частности, Бернар Лами (1640-1715) – автор элементарных руководств по математике, которые пользовались популярностью на рубеже XVII-XVIII вв. В этих работах – наряду с заимствованными у Декарта общими рассуждениями о методе – мы находим конкретные примеры, демонстрирующие преимущество аналитического метода перед геометрическим построением.

Следуя за Декартом, Лами считал главным достоинством аналитики ее доступность, то есть, возможность ее освоения и применения каждым грамотным человеком.

Вот как он характеризует свой «Трактат о величине» (1680):

«… [я предлагаю] читателям моего труда занять мое (авторское) место; почувствовать себя не просто читателем с книгой в руках, но творцом, которому предстоит (самостоятельно) найти все то, чему предлагает научить эта книга. Я вовсе не считаю себя учителем; на деле, я выступаю лишь в роли посредника, который подготавливает ум читающего мои труды к тому, чтобы тот без особого

напряжения мог сам обнаружить истины излагаемых мною начал и усмотреть их естественные следствия». [Lamy 1710, p. 1-2].

Эту мысль Лами конкретизирует в работе «Новые начала геометрии» (1692), сравнивая Метод (аналитической геометрии) с геометрическими решениями.

«Решение (геометрической) задачи, – отмечает он в разделе «Метод» – может быть найдено двумя путями. Первый путь состоит в обращении к «Началам» [Евклида]; в этой книге можно обнаружить прием, который подойдет для решения данной задачи; однако, для других задач он будет непригоден. Второй путь – следование порядку, который предписывается Методом; на этом пути решение находится превосходнейшим образом, ибо Метод в силу своей общности дает решение всех задач» [Lamy 1692, p. 315].

Проанализируем пример задачи, которую Лами решает двумя способами.

Рассматривается равнобедренный треугольник ABC (AB = AC). В нем параллельно основанию BC требуется провести прямую линию DE (точки D и E лежат, соответственно, на боковых сторонах AB и AC) так, чтобы было выполнено равенство отрезков DB = DE.

Сначала Лами приводит геометрическое решение. Его идея состоит в использовании вспомогательного построения. Проведем биссектрису угла ABC до пересечения со стороной AC в точке, которую обозначим через E. Через точку E проведем прямую, параллельную основанию BC, до пересечения со стороной AB в точке, которую обозначим через D. Полученный отрезок DE является искомым.

Доказательство следует из определения биссектрисы и теоремы о равенстве накрест лежащих углов при параллельных прямых: из равенства углов CBE и DBE треугольника BDE заключаем о равенстве его сторон – BD и DE.

Алгебраическое решение начинается, как обычно, с установления соответствия между величинами отрезков и обозначающими их символами.

Предположим, что задача решена и искомая прямая DE построена. Обозначим стороны AB = AC через a, сторону BC через d, а неизвестный отрезок AD через x.

По условию BD = DE = $a - x$.

Из подобия треугольников ADE и ABC следует пропорциональность соответствующих сторон, что на языке алгебры выражается формулой:

$$\frac{a}{d} = \frac{x}{a - x}.$$

Полученное выражение преобразуем в уравнение

$$a^2 = xd + ax = x\ (d + a),$$

из которого находим неизвестную величину x:

$$x = \frac{a^2}{d + a}$$

Используя это решение, строим прямоугольник, площадь которого равна площади квадрата со стороной a, а сторона – отрезку $d + a$. Вторая сторона этого прямоугольника и даст нам искомый отрезок x [Lamy 1692, p. 315-317].

Очевидно, что геометрическое решение требует творческого подхода – надо сообразить, что для построения искомой прямой линии нужно провести биссектрису (возможны и другие геометрические способы решения). Далеко не все учащиеся обладают достаточным воображением, чтобы самостоятельно догадаться до этого. Использование алгебраической техники, напротив, позволяет при решении задачи обойтись без чрезмерного интеллектуального усилия.

Следующий этап развития аналитики в XVII веке связан с работами Лейбница, который расширил сферу применения новой математической техники, распространив ее на бесконечно малые величины (дифференциалы).

Мотивы, которыми руководствовался при этом Лейбниц, сходны с мотивами Декарта. Прежде всего, это – исключение из математики творческого воображения, которое лишь затрудняет анализ и приводит к ошибкам в рассуждениях.

Лейбниц писал Христиану Гюйгенсу (1691):

«Вы верно рассудили, что самым лучшим и наиболее удобным в моем новом исчислении является то, что оно при помощи разновидности анализа представляет истины *без какого-либо усилия со*

стороны воображения, которое зачастую лишь по воле случая приводит к успеху…» (курсив мой – *Е.З.*) [Huygens 1906, p. 157].

В другом месте он развивает эту мысль, ссылаясь на собственный опыт применения бесконечно малых при исследовании циклоиды (1692):

«Я вспоминаю, как в свое время мое исчисление позволило мне почти *без размышления* прийти почти ко всем результатам, касающимся циклоиды, которые были ранее получены (другими). Ибо в этом исчислении меня больше всего привлекает то, что оно обладает тем же самым преимуществом перед геометрией древних в лице Архимеда, что и исчисление Виета и Декарта перед геометрией Евклида и Аполлония – оно избавляет нас от работы посредством воображения» (курсив мой – *Е.З.*). [Huygens 1906, p. 227].

Смысл последнего предложения этого фрагмента состоит в следующем. Геометрический метод Евклида и Аполлония в применении, скажем, к вопросу о конкретном виде конического сечения может потребовать сложных построений. На тот же вопрос аналитическая геометрия дает ответ почти автоматически. Чтобы определить вид сечения достаточно записать его уравнение в канонической форме и вычислить детерминант матрицы, составленной из коэффициентов при квадратичных членах. Знак детерминанта позволяет ответить на вопрос, является данное сечение эллипсом, гиперболой или параболой.

Сопоставляя созданное им исчисление с «геометрией древних в лице Архимеда», Лейбниц имеет в виду возможность прямого нахождения квадратур (площадей под кривыми) при помощи определенного интеграла. Этот формальный прием имеет очевидное преимущество перед тяжеловесным методом исчерпывания, которым пользовался Архимед при доказательстве теоремы о площади под параболой.

В XVIII веке связь аналитических методов с геометрией постепенно ослабевает; к концу столетия эта связь практически исчезает, и аналитика становится самостоятельным разделом математики. Большую роль в ее «возвышении» сыграло эффективное использование аналитических методов в теоретической механике (Ж.-Л. Лагранж).

Библиографический список

1. Декарт Рене. Избранные произведения. Т. 1. М.: Мысль, 1989.

2. Lamy Bernard. Elemens des mathematiques ou traité de la grandeur en general. Amsterdam: Marret, 1710.

3. Bernard Lamy. Nouveaux élemens de Geometrie, ou de la mesure du corps. Paris: Pralard, 1692.

4. Huygens Christiaan. Œuvres complètes. T. 10. Correspondance, 1691-1695. La Haye: Nijhoff, 1905.

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 512.77+515.162.6+519.175.3

В.И. Звонилов

Скелеты тригональных кривых и жесткая изотопическая классификация неособых вещественных алгебраических кривых бистепени (4, 3) на гиперболоиде

Жесткая изотопическая классификация неособых вещественных алгебраических кривых бистепени (4,3) на гиперболоиде получена ранее автором с помощью гомологий пространства кривых этой бистепени. В настоящей работе эта классификация описана на языке графов и скелетов вещественных тригональных кривых на поверхности Хирцебруха, полученных преобразованиями Нагаты из указанных кривых на гиперболоиде. Для каждого жёсткого изотопического класса приведён канонический граф или скелет.

Ключевые слова: *пространства вещественных алгебраических кривых, кривые на гиперболоиде, вещественные тригональные кривые, графы тригональных кривых.*

V. I. Zvonilov

Skeletons of trigonal curves and the rigid isotopy classification of nonsingular real algebraic curves of bidegree (4,3) on a hyperboloid

A rigid isotopy classification of nonsingular real algebraic curves of bidegree (4,3) on a hyperboloid was previously obtained by the author using the homology of the space of curves of this bidegree. In the present paper, this classification is described in the terms of graphs and skeletons of real trigonal curves on a Hirzebruch surface obtained by the Nagata transformations from the specified curves on the hyperboloid. For each rigid isotopy class, a canonical graph or skeleton is given.

Key words: *spaces of real algebraic curves, curves on a hyperboloid, real trigonal curves, graphs of trigonal curves.*

1. Кривые на гиперболоиде, жёсткая изотопия

Пусть $[x_0 : x_1]$, $[y_0 : y_1]$ – однородные координаты на гиперболоиде $P^1 \times P^1$. *Вещественная алгебраическая кривая бистепени* (m_1, m_2) на гиперболоиде определяется уравнением $F(x_0, x_1; y_0, y_1) = 0$, где F – вещественный однородный многочлен степеней m_1 и m_2 по x_0, x_1 и y_0, y_1.

Вещественная схема неособой вещественной алгебраической кривой $A \subset P^1 \times P^1$ – это схема взаимного расположения компонент её вещественной части $\mathbb{R}A$. Стягиваемые в $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$ компоненты называются *овалами*. Все нестягиваемые компоненты N_1, ... , N_h реализуют один и тот же ненулевой класс (c_1,c_2) в $H_1(\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1)$, где c_1, c_2 взаимно просты. Вещественная схема кривой кодируется следующим образом: <(c_1,c_2), scheme$_1$, (c_1,c_2), scheme$_2$, ... , (c_1,c_2), scheme$_h$>, где scheme$_1$, scheme$_2$, ..., scheme$_h$ -- схемы расположения овалов, лежащих в связных компонентах поверхности $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1 \setminus (N_1 \cup ... \cup N_h)$.

Неособая вещественная алгебраическая кривая A принадлежит *типу* I, если множество $\mathbb{C}A \setminus \mathbb{R}A$ несвязно, и *типу* II, если оно связно. В настоящей работе *комплексная схема* кривой есть вещественная схема + тип. Комплексные схемы с вещественной схемой <B> обозначаются через <B>$_{\mathrm{I}}$ и <B>$_{\mathrm{II}}$.

Жесткой изотопией вещественных алгебраических кривых некоторого класса называется путь в пространстве кривых этого класса.

2. Поверхности Хирцебруха, преобразования Нагаты, тригональные кривые

Поверхность Хирцебруха $\Sigma_k, k \geq 0$, является пространством расслоения $q: \Sigma_k \to P^1$ со слоем P^1, т.е. рациональной линейчатой поверхностью с исключительным сечением E_k, $E_k^2 = -k$. Поверхность $\Sigma_0 = P^1 \times P^1$ является гиперболоидом, в котором в качестве исключительного сечения можно взять любую кривую бистепени $(0,1)$.

Положительным (отрицательным) преобразованием Нагаты называется послойное бирациональное преобразование $\Sigma_k \to \Sigma_{k+1}$ (соответственно, $\Sigma_k \to \Sigma_{k-1}$), состоящее из раздутия

точки $p \in E_k$ (соответственно, $p \notin E_k$) и последующего стягивания в точку собственного прообраза слоя расслоения q, проходящего через точку p.

Положительное (отрицательное) преобразование Нагаты переводит E_k в E_{k+1} (соответственно, в E_{k-1}).

Алгебраическая кривая $C \subset \Sigma_k$ называется *тригональной*, если сужение $q|_C$ является трёхлистным разветвлённым накрытием. Кривая называется *собственной*, если она не пересекается с исключительным сечением. Вещественная тригональная кривая C называется *гиперболической*, если все точки пересечения кривой с вещественными слоями расслоения q являются вещественными.

Положительное и отрицательное преобразования Нагаты устанавливают взаимосвязь между кривыми бистепени $(m, 3)$ на гиперболоиде и собственными тригональными кривыми: кривой $C \subset \Sigma_0$ отвечает её образ $N(C) \subset \Sigma_k$ при положительном преобразовании Нагаты, раздувающем точки пересечения кривой C с кривой $E_0 \subset \Sigma_0$.

3. Граф тригональной кривой

В некоторой аффинной карте на Σ_k исключительное сечение E_k и собственная тригональная кривая C определяются уравнениями $y = \infty$ и $y^3 + b(x)y + w(x) = 0$, где b и w — сечения расслоения q, которые можно рассматривать как однородные многочлены степеней $2k$ и $3k$. Рациональная функция $j = j_C = \frac{4b^3}{\Delta} = 1 - \frac{27w^2}{\Delta}$, где $d = 4b^3 + 27w^2$ – *дискриминант*, называется – *инвариантом* кривой C.

Пусть круг D — фактор-пространство прямой $\mathbb{C}P^1$ по комплексному сопряжению, а $\mathrm{pr}: \mathbb{C}P^1 \to D$ — проекция. В образе - инварианта $j_C: \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ вещественной тригональной кривой $C \subset \Sigma_k$ раскрасим $\mathbb{R}P^1$ следующим образом: 0, 1, и ∞ — это, соответственно, чёрная, белая и крест-вершина; $(\infty, 0)$, $(0,1)$ и $(1, \infty)$ — это, соответственно, сплошное, жирное и пунктирное ребро. Прообраз $\Gamma_C = \mathrm{pr}(j_C^{-1}(\mathbb{R}P^1))$, наделённый соответствующей раскраской, называется *графом тригональной кривой* C. Вершины и рёбра графа, лежащие на границе ∂D круга

D, называются *вещественными.* На рисунках эта граница и её подмножества обозначены серыми полосами.

Собственная тригональная кривая определяется своим графом с точностью до гомотетии вдоль оси OY.

4. Скелет вещественной тригональной кривой

Объединение замыканий некоторых одинаково раскрашенных вещественных ребер графа Γ_C называется *сегментом*, если оно гомеоморфно отрезку. Пунктирный (жирный) сегмент называется *максимальным* если его концами являются две *неособые* (т.е. отвечающие простым корням дискриминанта d) крест-вершины (соответственно, две чёрные вершины). Максимальный пунктирный сегмент графа негиперболической кривой, содержащий четное/нечетное количество белых вершин, называется *овалом/зигзагом*; он является проекцией овала/зигзага соответствующей тригональной кривой. Максимальный пунктирный/жирный сегмент с четным/нечетным количеством белых вершин называется *волной/скачком*.

Как и в [1], можно доказать, что для тех особых тригональных кривых на Σ_4, которые изучаются в работе, с точностью до жёсткой изотопии можно считать, что все особые точки являются вещественными и уединёнными.

Скелет негиперболической тригональной кривой, допускающей лишь уединённые особые точки, получается из её графа склейкой каждого овала/зигзага в вещественную белую вершину, волны/скачка – в вещественную чёрную вершину скелета, сохранением всех крест-вершин и мнимых чёрных/белых вершин и наконец, удалением всех рёбер, кроме пунктирных. На рёбрах скелета, не являющихся частями *разреза* (подробнее см. [1, п. 4.6, п. 5]), указаны ориентации. Особые крест-вершины обозначаются двойным крестом.

Негиперболическая собственная тригональная кривая определяется своим скелетом с точностью до жёсткой изотопии.

4. Основной результат

Вещественные схемы неособых кривых бистепени (4,3) на гиперболоиде перечислены в работе [2]: $<(3, \pm m)>$, $m = 0, 2, 4$, $<(1, \pm m)$,

$l>$, $0 \le l \le 6$, $m = 0, 2$, и $< (1, \pm 4) >$. Четыре схемы $<(1, \pm m), l>$, $l = 0, 2$, $m = 0, 2$, могут иметь как тип I, так и тип II.

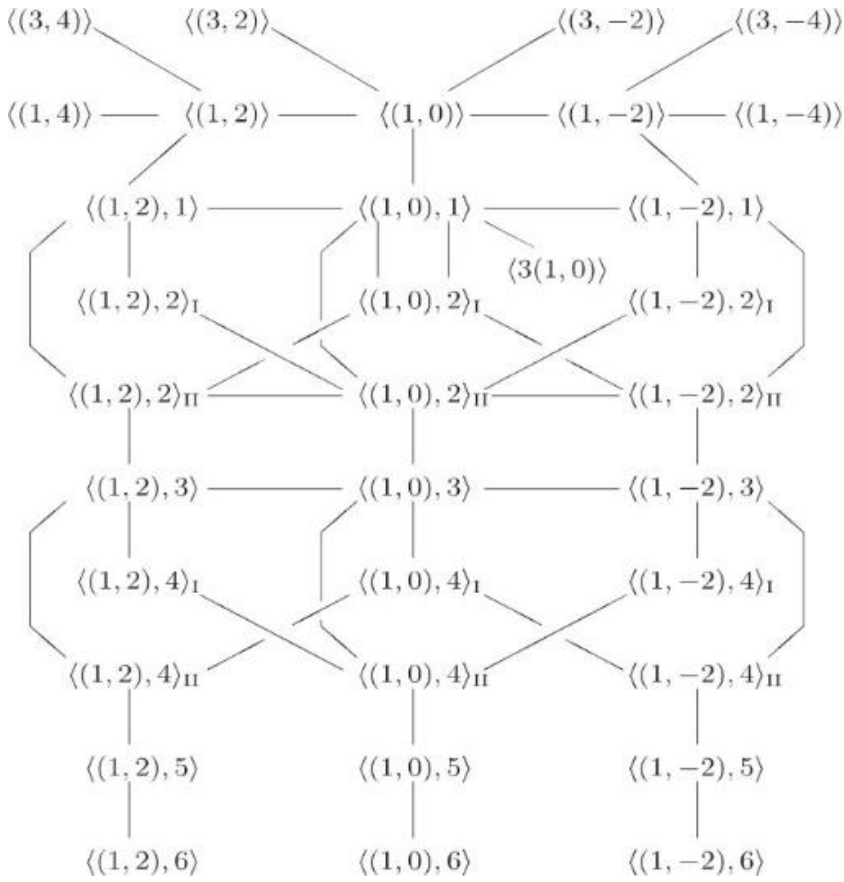


Рис. 1. Комплексные схемы неособых кривых бистепени (4,3) на гиперболоиде

В работе автора [3, теорема 2] утверждалось, что *неособая кривая бистепени* (4,3) *на гиперболоиде определяется с точностью до жесткой изотопии своей комплексной схемой* – см. рис. 1. Для доказательства этого использовался подход, предложенный в [4]

для получения жесткой изотопической классификации плоских вещественных квинтик и основанный на теореме 1 работы [3], указывающей все компоненты связности пространства кривых бистепени (4,3), имеющих единственную невырожденную двойную точку или точку возврата. Доказательство теоремы 1 было начато автором в [3]; в [5] был указан пробел в этом доказательстве, который был недавно устранён в работе [1] с использованием графов и скелетов вещественных тригональных кривых на Σ_3, полученных из особых кривых бистепени (4,3) на гиперболоиде.

Классификация [3, теорема 2] неособых кривых описывается на языке графов и скелетов вещественных тригональных кривых на Σ_4, полученных из неособых кривых бистепени (4,3) на гиперболоиде, следующим образом. После четырёхкратного положительного преобразования Нагаты такая кривая даёт собственную кривую на Σ_4.

Канонические графы гиперболических кривых, отвечающих кривым на гиперболоиде со схемами $< (3, \pm m)>$, $m = 0, 2, 4$, указаны на рис. 2. Канонические скелеты негиперболических кривых, отвечающих кривым на гиперболоиде со схемами $<(1, \pm m), l >$, $0 \le l \le 6$, $m = 0, 2$, и $<(1, \pm 4)>$ указаны на рис. 3.

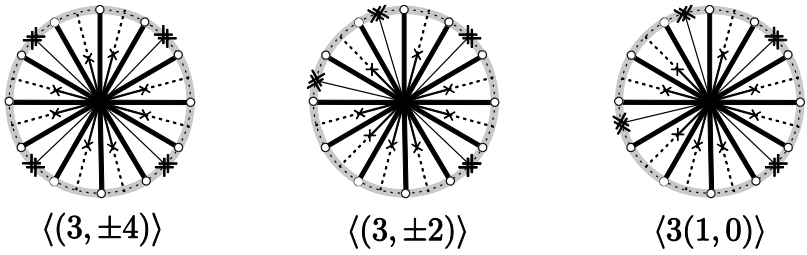


Рис. 2. Канонические графы гиперболических кривых

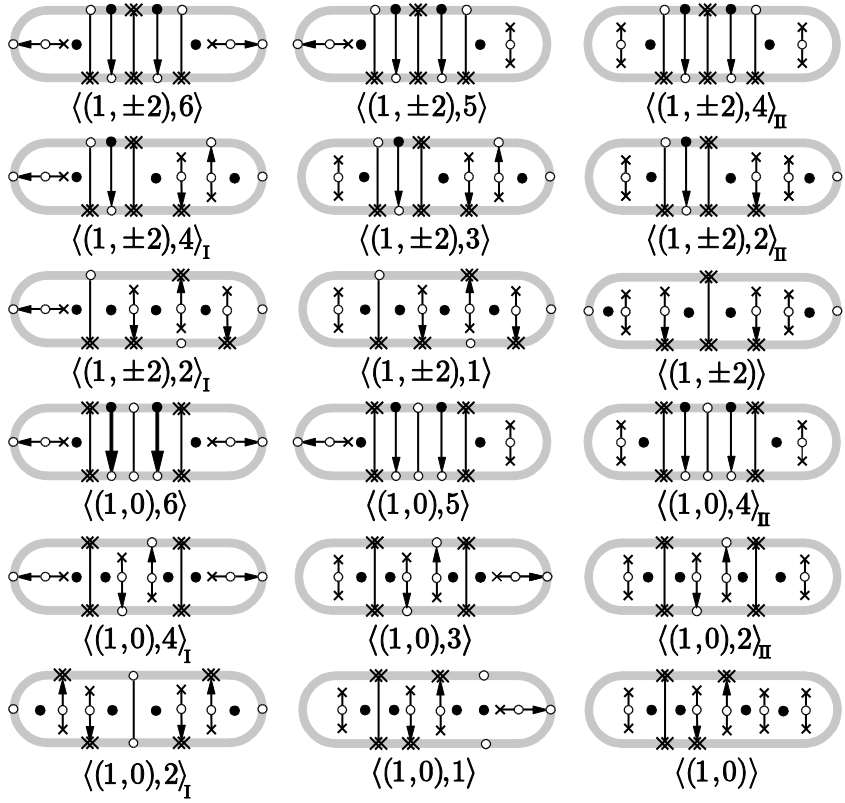


Рис. 3. Канонические скелеты негиперболических кривых

Работа выполнена в рамках государственного задания FSWR-2023-0034.

Библиографический список

1. Звонилов В.И. Графы тригональных кривых и жесткие изотопии особых вещественных алгебраических кривых бистепени (4,3) на гиперболоиде // Математика и теоретические компьютерные науки. 2025. Т. 3. Вып. 1. С. 26-51.

2. Звонилов В.И. Комплексные топологические инварианты вещественных алгебраических кривых на гиперболоиде и эллипсоиде. Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. Вып. 5. С. 88-108.

3. Звонилов В. И. Жесткая изотопическая классификация вещественных алгебраических кривых бистепени (4,3) на гиперболоиде // Вестник Сыктывкарского университета. 1999. Сер. 1. Вып. 3. С. 81-88.

4. Degtyarev A., Itenberg I., Kharlamov V. Real Enriques surfaces. Lecture Notes in Math., 2000, vol. 1746, Springer-Verlag, 259 pp.

5. Звонилов В.И. Жесткая изотопическая классификация вещественных алгебраических кривых бистепени (4,3) на гиперболоиде. Приложение // Вестник Сыктывкарского университета. 2003. Сер. 1. Вып. 5. С. 239-242.

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 51(091)

И.В. Игнатушина, И.К. Зубова

Г.П. Матвиевская – ученый, педагог, краевед

Статья посвящена научной деятельности и жизненному пути Галины Павловны Матвиевской – доктора физико-математических наук, специалиста в области истории математики и математического образования, востоковедения и краеведения. Рассматриваются её ключевые исследования по изучению научного наследия Л.Эйлера, истории средневековой восточной и европейской математики, а также историко-научному краеведению.

***Ключевые слова**: Галина Павловна Матвиевская, история математики, востоковедение, краеведение, изучение неопубликованных рукописей Л.Эйлера.*

I.V. Ignatushina, I.K. Zubova

G.P. MATVIYEVSKAYA – SCIENTIST, TEACHER, CREEDIST

The article is devoted to the scientific activity and life path of Galina Pavlovna Matviyevskaya, a doctor of physico–mathematical sciences, a specialist in the field of the history of mathematics and mathematical education, oriental studies and local history. Her key research studies on the scientific heritage of L.Euler, the history of medieval Eastern and European mathematics, as well as historical and scientific local history are considered.

***Keywords**: Galina Pavlovna Matviyevskaya, history of mathematics, oriental studies, local history, study of unpublished manuscripts by L.Euler.*

Галина Павловна Матвиевская родилась 13 июля 1930 г. в Днепропетровске в семье педагогов. Её отец Павел Евменович Матвиевский (1904-1987) был историком, а мать, Ксения Яковлевна Матвиевская (1896-1995) (в девичестве Гололобова), преподавала иностранный язык [1].

Через год семья переехала в Харьков. Здесь Галина Павловна начала учиться в школе и окончила два первых класса. В 1940 г. П.Е. Матвиевский прошёл по конкурсу в Оренбургский (тогда Чкаловский) педагогический институт и стал доцентом кафедры истории СССР, в связи с чем семье предстояло переехать. Но 22 июня 1941 г. началась война и третьекласснице Галине вместе с мамой пришлось добираться от Харькова до Чкалова на платформах со станками эвакуированного завода семнадцать дней.

В Чкалове (который с 1957 г. стал вновь называться Оренбургом) семья осталась навсегда. В 1948 г. Галина Павловна с золотой медалью окончила школу и поступила на математико-механический факультет Ленинградского (теперь Санкт-Петербургского) университета, где специализировалась по теории чисел у профессора Бориса Алексеевича Венкова (1900-1962).

В 1954 г. Г. П. Матвиевская, окончившая с отличием университет по специальности "Математика", была принята в аспирантуру Ленинградского отделения Института истории естествознания и техники АН СССР по специальности "История математики". Её научным руководителем стал выдающийся советский математик академик Владимир Иванович Смирнов (1887-1974), который в это время приступил к исследованию математических рукописей великого учёного XVIII в. Леонарда Эйлера (1707-1783). Руководитель поставил перед аспиранткой задачу выявить и проанализировать содержащиеся в записных книжках Эйлера записи по теории чисел, что потребовало от Галины Павловны изучения латыни и освоения методов работы с архивными документами. После защиты в 1958 г. диссертации "Неопубликованные рукописи Леонарда Эйлера по теории чисел" ей была присвоена учёная степень кандидата физико-математических наук.

После окончания аспирантуры Г.П. Матвиевская продолжила свою научную деятельность в Ленинградском Отделении Института истории естествознания и техники АН СССР, работая над записными книжками Эйлера. Эти исследования она не прерывала и в дальнейшем; её результаты публиковались как в российских, так и в зарубежных научных изданиях. В 1974 г. Г.П. Матвиевская вошла в состав редколлегии 4-й серии полного собрания сочинений Эйлера, издаваемого в Швейцарии.

Но из Ленинграда пришлось переехать в Ташкент. В 1957 г.

Галина Павловна вышла замуж за Карима Рахимовича Рахимова, который в то время учился в аспирантуре при Институте физиологии им. И.П. Павлова Академии наук СССР. В 1958 г. он защитил кандидатскую диссертацию и считал своим гражданским долгом вернуться в Узбекистан. В Ташкенте Карим Рахимович стал видным физиологом, доктором биологических наук, заслуженным деятелем науки Узбекистана. Скончался К.Р. Рахимов в 2000 г.

После переезда в Ташкент Галина Павловна начала работать в Институте математики им. В. И. Романовского АН УзССР, директором которого был видный узбекский математик и общественный деятель, ученик А.Н. Колмогорова, в то время член-корреспондент АН УзССР Сагды Хасанович Сираждинов (1921-1988). Он предложил Г.П. Матвиевской заняться изучением восточных рукописей IX-XV вв. математического и астрономического содержания. Эта работа потребовала от Галины Павловны овладения арабским языком и знаниями, необходимыми востоковеду [2].

Она сделала обзор русской и иностранной литературы о творчестве среднеазиатских ученых, который стал основой её монографии "К истории математики Средней Азии IX-XV вв.", изданной в 1962 г. На материале своих переводов арабских комментариев к X книге "Начал" Евклида Г.П. Матвиевская подготовила монографию "Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке", которая вышла в 1967 г.

В 1968 г., защитив диссертацию на тему "Учение о числе в средние века", Г.П. Матвиевская получила учёную степень доктора физико-математических наук.

В последующие годы она опубликовала ряд работ по истории алгебры, тригонометрии и астрономии, основанных на исследовании арабских первоисточников [3]. К ним относятся: комментированный перевод с арабского "Трактата о несоизмеримых величинах" ученого X-XI вв. Ибн ал–Багдади, работа о зарождении элементов математики переменных величин на Ближнем и Среднем Востоке, "Очерки истории тригонометрии" и др., а также статьи и книги о творчестве выдающихся ученых Востока: ал–Хорезми, ал–Фараби, Абд–ар–Рахмана ас–Суфи, Ибн Сины, Абу Райхана Беруни, Ибн Ирака, Насир ад–Дина ат–Туси, Улугбека и др.

Работе над библиографией Г. П. Матвиевская всегда придавала большое значение. Полученные в этом направлении результаты

отражены в статьях и трехтомном справочнике "Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды (VIII-XVII вв.)", изданном в 1983 г. совместно с известным геометром и историком науки Борисом Абрамовичем Розенфельдом (1917-2008).

Г.П. Матвиевская интересовалась не только восточной тематикой, но и историей передачи математического наследия восточных ученых в Европу и преемственности научных идей, в частности, изучала средневековые латинские переводы арабских версий "Начал" Евклида. Важнейшей работой в этой области стала её монография «Развитие учения о числе в Европе до XVII в.» (1971 г.), основанная на оригинальных латинских источниках и развивающая идеи её докторской диссертации [4].

В академической серии "Научно-биографическая литература" она опубликовала книги о выдающихся ученых: "Рене Декарт" (1976), "Рамус. 1515-1572" (1981), "Альбрехт Дюрер – ученый" (1987), "Владимир Иванович Смирнов" (1994, коллективная монография), "Всеволод Иванович Романовский" (1997, в соавторстве с А. Н. Боголюбовым), "Улугбек. 1394-1449" (1997, в соавторстве с З. К. Соколовской), "Абд–ар–Рахман ас–Суфи. 903-986" (1999).

Она также была ответственным редактором множества научных изданий и автором рецензий на печатные работы и диссертации, касающиеся различных аспектов истории естественных наук. Г.П. Матвиевская делала доклады на конференциях, съездах и симпозиумах, включая XIII и XVI Международные конгрессы по истории науки (Москва, 1971 г.; Бухарест, 1981 г.), международные конференции по истории арабской науки (Аллепо, 1979; Париж, 1989 г.) и международные симпозиумы по истории математики (Обервольфах, 1987, 1992 гг.). В Национальном объединении историков науки и техники Узбекистана она работала учёным секретарём, а затем одним из заместителей председателя.

Г.П. Матвиевская активно привлекала молодых исследователей к изучению истории точных наук на средневековом Востоке. По этой тематике под её руководством защищено 9 кандидатских диссертаций [5].

С 1992 г. Г.П. Матвиевская жила в Оренбурге и до 2017 г. работала в Оренбургском государственном педагогическом университете (ОГПУ), где с 2004 г. возглавляла кафедру алгебры и истории математики. В 1994 г. она получила звание профессора.

Благодаря её усилиям в ОГПУ была организована научная школа, специализирующаяся на истории математики и математического образования [1].

Ещё до переезда в Оренбург Галина Павловна начала подготовку к печати работы её отца, книги о Петре Ивановиче Рычкове (1712-1777), первом исследователе Оренбургского края, написанной в соавторстве с краеведом из Бугульмы Анатолием Васильевичем Ефремовым. Для неё это стало отправной точкой интереса к оренбургскому краеведению. С начала 90-х гг. она занималась историей научных исследований в Оренбургском крае XVIII-XIX вв., опираясь на документы Государственного Архива Оренбургской области и других архивов. Ею были опубликованы статьи о роли Оренбурга как центра отечественного востоковедения в XVIII-XIX в., об астрономических экспедициях 1769 г. в Оренбургский край, о научной деятельности Э.А. Эверсмана, А. Лемана, В.И. Даля, Г.С. Карелина, Н.В. и Я.В. Ханыковых, Н.А. Северцова и других ученых, работавших в Оренбурге, о первых оренбургских краеведческих музеях, о научных экспедициях, организованных для изучения края в XVIII-XIX вв., об учебных заведениях Оренбурга, в частности, о преподавании математики в этих учебных заведениях в конце XIX – начале XX вв.

Кроме краеведческих исследований Г.П. Матвиевская продолжала заниматься изучением научного наследия Л. Эйлера. Под её руководством на физико-математическом факультете ОГПУ работал научный семинар, в рамках которого вышли пять сборников статей "Из истории математики XVIII века. К предстоящему 300-летнему юбилею Леонарда Эйлера", ответственным редактором которых являлась Г.П. Матвиевская. По данной тематике под руководством Г.П. Матвиевской защищено три кандидатские диссертации.

Опыт педагога, читавшего курс истории математики в педагогическом университете, Галина Павловна отразила в учебном пособии «История математики: Курс лекций» (2019 г.), где в строго научной, но доступной для студентов форме представлена история развития математической науки с древнейших времен до XIX века.

Г.П. Матвиевская была действительным членом Международной Академии истории науки (1995), академиком Академии наук Узбекистана (2000), профессором Оренбургского государственного педагогического университета (с 1994 по 2017), членом союза

писателей России (с 2000), заслуженным деятелем науки Узбекской ССР (1980). Она стала лауреатом Государственной премии Узбекской ССР имени Абу Райхана Беруни в области науки и техники (1974), лауреатом премии администрации Оренбургской области в сфере науки и техники (2002, 2008, 2011), лауреатом премии главы администрации области "Оренбургская лира" (2002, 2011), лауреатом Всероссийской литературной премии "Капитанская дочка" (2005), кавалером ордена «Славы нации» 1 степени (2008), Почетным работником высшего профессионального образования (2010).

30 января 2025 года, после повторного инсульта, она ушла из жизни.

Те, кто имел честь общаться с Галиной Павловной, помнят её как выдающегося ученого и педагога, человека предельно доброжелательного и невероятно трудолюбивого. Позитивным настроем к жизни и работе Галина Павловна вдохновляла многих на научные свершения. Под её руководством 13 исследователей защитили диссертации на соискание ученой степени кандидата наук, некоторые из них впоследствии стали докторами наук. Авторы данной статьи гордятся тем, что являются её учениками.

Библиографический список

1. Галина Павловна Матвиевская / Сост. И.В. Игнатушина; Мин-во образования и науки РФ; Оренбург. гос. пед. ун-т. – Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2005. 45 с.

2. Галина Павловна Матвиевская // Материалы к библиографии ученых республики Узбекистан / Отв. ред. Т.Д. Джураев. Сост. Г.Э. Юсупова, А.А. Викторова. Ташкент: Фан, 1992. 21 с.

3. Башмакова И.Г. и др. Призванная богиней Клио (К юбилею Г.П. Матвиевской) // Математика в школе. М., 1990. № 5. С. 68-69.

4. Демидов С.С., Зайцев Е.А., Петрова С.С., Смирнова Г.С. Торжественное заседание, посвященное юбилею Галины Павловны Матвиевской // Вопросы истории естествознания и техники. 2021. Т. 42. № 2. С. 377-382

5. Матвиевская Г.П. Матвиевская Галина Павловна // Путь в профессию: ИИЕТ в воспоминаниях сотрудников. М., 2022. С.139-148.

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 517.165

С. И. Калинин, Л. В. Панкратова

Об одном обобщении дамасского неравенства

Настоящая статья посвящена исследованию одного из обобщений так называемого «дамасского» неравенства. Рассмотрены некоторые частные случаи обобщенного неравенства. Авторы обращаются к технике, основанной на применении нетривиальной комбинации элементарных методов оценки выражений, использовании аппарата производной функции одной действительной переменной и свойств строго GA-вогнутой на промежутке функции.

Ключевые слова: *дамасское неравенство, обобщение дамасского неравенства, производная, GA-вогнутая функция.*

S.I. Kalinin, L.V. Pankratova

A generalization of the Damascus inequality

This article is devoted to the study of one of the generalizations of the so-called «Damascus» inequality. Some special cases of generalized inequality are considered. The authors turn to a technique based on the application of a non-trivial combination of elementary methods for evaluating expressions, using the apparatus of the derivative of a function of one real variable and the properties of a strictly GA-concave function on the interval.

Keywords: *Damascus inequality, generalization of the Damascus inequality, derivative, GA-concave function.*

В 2016 году в работе [Dannan, 2016] С.М. Ситником и Fozi M. Dannan было представлено к обсуждению неравенство

$$\frac{x-1}{x^2-x+1}+\frac{y-1}{y^2-y+1}+\frac{z-1}{z^2-z+1}\leq 0 \qquad (1)$$

для положительных чисел x, y, z, удовлетворяющих условию $xyz=1$. В цитируемой работе авторы рассматривают доказа-

тельства (1), основанные на обращении к симметрическим функциям, методу множителей Лагранжа, а также геометрической интерпретации соотношений. Видимо, в силу того, что Fozi M. Dannan – профессор Департамента фундаментальных наук Арабского международного университета (Сирия, Дамаск), неравенство (1) получило резонное название «дамасского».

В недавней работе [Kalinin, 2025] реализован элементарный подход к обоснованию (1). В этой же статье вниманию читателя предложено к рассмотрению неравенство

$$\frac{x^n-1}{x^{n+1}+1}+\frac{y^n-1}{y^{n+1}+1}+\frac{z^n-1}{z^{n+1}+1}\le 0, \qquad (2)$$

где величины x, y, z – снова положительные числа, для которых $xyz=1$, и $n\in \boldsymbol{N}$. Нетрудно видеть, что (1) получается из (2) при $n=2$, следовательно, для $n=2$ неравенство (2) справедливо. В настоящей работе мы приведем доказательство (2) для $n=1$ и его опровержение для $n=4$.

Установим сначала неравенство (2) для $n=1$, т.е. докажем справедливость соотношения

$$\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{y-1}{y^2+1}+\frac{z-1}{z^2+1}\le 0 \qquad (x,y,z\in \boldsymbol{R}_+;\ xyz=1). \qquad (3)$$

Доказательство.

1. Легко видеть, что при условии $x=y=z=1$ неравенство (3) обращается в равенство. Покажем, что если среди чисел x, y, z есть два равных, то (3) справедливо.

Без ограничения общности положим $x=y$. Тогда $z=\frac{1}{x^2}$, и (3) можно записать так:

$$2\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{x^2-x^4}{x^4+1}\le 0. \qquad (4)$$

Равносильными преобразованиями (4) приводится к очевидному соотношению

$$-\frac{(x-1)^2\left(x^4+x^2+2x+2\right)}{(x^2+1)(x^4+1)}\le 0,$$

из которого следует, что равенство в (4) достигается только при $x=1$. Но тогда $y=z=1$.

Далее будем анализировать (3) при условии, что все переменные x, y, z различны. Покажем, что в этом случае $\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{y-1}{y^2+1}+\frac{z-1}{z^2+1}<0$.

2. Введем в рассмотрение функцию $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$ и исследуем ее на экстремум для $x>0$. Поскольку $f'(x)=\frac{1+2x-x^2}{(x^2+1)^2}$, на рассматриваемом промежутке $f(x)$ имеет единственную точку экстремума (максимума) – $x_{max}=1+\sqrt{2}$. Для реализации дальнейших оценок вычислим значение экстремума: $f_{max}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

3. Исследуем функцию $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$ на GA-выпуклость (GA-вогнутость) при $x>0$, основываясь на достаточных условиях GA-выпуклости (GA-вогнутости), описанных, например, в [Калинин, 2017, с. 29]. Для этого составим выражение $\Delta_f=f'(x)+xf''(x)$. Так как $f'(x)=\frac{1+2x-x^2}{(x^2+1)^2}$,

$f''(x)=\frac{2-6x-6x^2+2x^3}{(x^2+1)^3}$, то $\Delta_f=\frac{1+4x-6x^2-4x^3+x^4}{(x^2+1)^3}$.

Рассмотрим числитель последней дроби – функцию

$$g(x)=1+4x-6x^2-4x^3+x^4.$$

Поскольку $g'(x)=4(x+1)(x^2-4x+1)$, то ее точками экстремума будут точки $x_{max}=2-\sqrt{3}$ и $x_{min}=2+\sqrt{3}$. Непосредственными вычислениями убеждаемся, что $g(0{,}7)=-0{,}2719<0$ и $g(4)=-79<0$. Все сказанное позволяет заключить, что при $x\in[0{,}7;4]$ функция $g(x)$ отрицательна, а значит, на этом отрезке $\Delta_f<0$, и функция $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$ является строго GA-вогнутой. Последнее влечет неравенство $f(x)+f(y)<2f\left(\sqrt{xy}\right)$ для $x,y\in[0{,}7;4]$, если $x\neq y$.

4. Перейдем к анализу возможных вариантов расположения чисел x, y, z по отношению к отрезку $[0{,}7;4]$.

а) Пусть среди чисел x, y, z найдутся два, принадлежащих отрезку $[0{,}7;4]$. Без ограничения общности можно полагать, что это x и y. Тогда

$$f(x)+f(y)+f(z)<2f\left(\sqrt{xy}\right)+f(z).$$

Для $\sqrt{xy}$, $\sqrt{xy}$ и z выполняется условие $xyz = 1$, поэтому в силу (2) имеем:

$$2f\left(\sqrt{xy}\right) + f(z) \le 0,$$

откуда непосредственно следует (3). Подчеркнем: если все переменные x, y, z различны, равенство в (3) невозможно.

б) Только одно из чисел x, y, z принадлежит отрезку $[0{,}7; 4]$. Упорядочим числа в порядке возрастания, предполагая $x < 0{,}7 \le y \le 4 < z$ или $x < y < 0{,}7 \le z \le 4$.

Заметим: x не может принадлежать рассматриваемому отрезку, так как в этом случае условие $xyz = 1$ влечет неравенство $yz \le \frac{10}{7}$, невозможное для $y, z > 4$.

В первом случае условия $0{,}7 \le y \le 4 < z$ и $xyz = 1$ позволяют заключить, что $x < \frac{5}{14}$. Тогда из условий монотонности функции $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ следует:

$$f(x) + f(y) + f(z) < f\left(\frac{5}{14}\right) + f(y) + f(4) = -\frac{126}{221} + \frac{\sqrt{2}-1}{2} + \frac{3}{17} < 0.$$

Во втором случае

$$f(x) + f(y) + f(z) < 2f(0{,}7) + f(z) < -\frac{60}{149} + \frac{\sqrt{2}-1}{2} < 0.$$

в) Пусть, наконец, ни одно из чисел x, y, z не принадлежит отрезку $[0{,}7; 4]$. Тогда без ограничения общности возможны ситуации

$$x < y < 0{,}7 \text{ и } z > 4 \quad \text{или} \quad 4 < y < z \text{ и } x < \frac{1}{16}.$$

В первой из них $f(x) + f(y) + f(z) < 2f(0{,}7) + f(4) = -\frac{60}{149} + \frac{3}{17} < 0$. Во второй – $f(x) + f(y) + f(z) < f\left(\frac{1}{16}\right) + 2f(4) = -\frac{240}{257} + \frac{6}{17} < 0$.

Мы рассмотрели все возможные случаи изменения переменных x, y, z. Итак, неравенство (3) верно, при этом равенство в нем достигается лишь при условии $x = y = z = 1$. Требуемое установлено.

Таким образом, неравенство (2), представляющее собой обобщение неравенства (1), верно для $n = 1$ и для $n = 2$. Однако для $n = 4$ неравенство (2) неверно.

Действительно, если положить $x = y = \frac{3}{2}$, $z = \frac{4}{9}$, то

$$\frac{x^4-1}{x^5+1} + \frac{y^4-1}{y^5+1} + \frac{z^4-1}{z^5+1} = \frac{52}{55} - \frac{56745}{60073} = \frac{2821}{55 \cdot 60073} > 0.$$

Вопрос о том, будет ли рассматриваемое неравенство (2) верным при $n = 3$ и $n > 4$, остается открытым. Адресуем его заинтересованному читателю.

В заключение обратим внимание на то, что предложенный метод доказательства (3) указывает новый, оригинальный способ решения определенного типа задач. Мы имеем в виду задачи на доказательство неравенств вида $f(x) + f(y) + f(z) \geq 0$ (или $f(x) + f(y) + f(z) > 0$) для положительных значений переменных, удовлетворяющих условию $xyz = 1$. Осмысление этого способа может составить предмет отдельного исследования.

Библиографический список

1. Калинин С.И. GA-выпуклые функции // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. № 3(24). С. 25-42.

2. Dannan F.M., Sitnik S.M. The Damascus inequality // Probl. Anal. Issues Anal. Vol. 5(23), No. 2, 2016, pp. 3-19. DOI: 10.15393/j3.art.2016.3350.

3. Kalinin S.I., Pankratova L.V.A simple proof of the damascus inequality // Problemy Analiza. Issues of Analysis. 2025. Vol. 14 (32), No. 2, 2025, pp. 97-102. DOI: 10.15393/j3.art.2025.17230.

УДК 371.671

Г.В. Кондратьева

К вопросу о развитии учебно-математических изданий конца XVII- начала XX веков

В статье рассматриваются вопросы становления и развития учебно-математических изданий с позиций методико-дидактического контента. Результатом исследования является построение периодизации развития печатной учебно-математической книги критерием которой предлагается определить особенности дидактико-методического наполнения учебно-математической книги. Периодизация состоит из 4 периодов, каждый из который имеет свою качественную особенность. В статье приводятся закономерности развития учебно-математических изданий выделенного временного интервала.

Ключевые слова: *учебно-математическое издание, развитие, периодизация, образование, история*

G. V. Kondrateva

Development of educational and mathematical publications in the late 17th – early 20th century

The article discusses the issues of the emergence and development of educational and mathematical publications from the standpoint of methodological and didactic content. The result of the research is the construction of a periodization of the development of a printed educational and mathematical book, the criterion of which is proposed to determine the features of its content. The periodization consists of 4 periods, each of which has its own qualitative feature. The article provides the development patterns of said books in the given time frame.

Key words: *educational and mathematical book, development, periodization, education, history.*

Современная ситуация с учебными изданиями может быть охарактеризована как время перемен. Переход от печатных изданий к цифровой книге уже основательно стал ведущим трендом. Объяснение современной ситуации и прогнозирование стратегии развития должно опираться на имеющийся опыт развития отечественных учебно-математических изданий. Рассматривая развитие учебно-математических изданий с конца XVII в., можно вскрыть главную закономерность в развитии учебно-математической литературы, а именно повышение востребованности достижений методико-математической мысли в процессе создания учебно-математических изданий. Почему изменяются учебные издания? Меняется система образования, меняется научное знание. Но, главное, нарастает методическая оснащенность учебно-математической литературы в целом. Этот процесс был поступателен, но, безусловно, нелинеен. Раскрыть тенденции данного процесса можно на основе построенной нами периодизации развития учебно-математических изданий. Хронологический интервал 1682 г.- 1918 г. Хронологические рамки данного исследования определены с 1682 по 1918 г. Нижняя граница интервала связана со временем опубликования в г. Москве первой отечественной печатной учебно-математической книги на русском языке. Верхняя хронологическая граница исследования обусловлена завершением очередного этапа в развитии учебно-математических изданий и школьного математического образования, обусловленного исчезновением Российской Империи как государства и выходом последних изданий учебно-математических книг, разработанных еще до 1917 г.

Рассматриваем 4 периода. В каждом решаются свои задачи. Начало каждого периода связано с выходом конкретной учебной книги. Такое деление является достаточно условным, но позволяет определить четкие рамки периодизации.

1. Первый период – (1682-1727 гг.). Первое издание периода «Считание удобное» (1682) – таблица умножения с вступительной статьей, в которой дана общая инструкция пользования таблицей. Это определяет обучающий функционал таблицы и позволяет отнести ее к учебно-математической литературе. Методические знания в данном периоде содержались имплицитно в создаваемых книгах и отражали личные взгляды автора. Определяется

направленностью на создание учебно-математических печатных изданий, которые качественно меняли средства обучения. Вместо рукописных книг появились массовые (тиражи более 2000 экземпляров) издания, которые заложили основу для перехода от индивидуальной практики обучения к школьному образованию.

Имеет место разработка визуального образа учебника: «Арифметика» Л.Ф. Магницкого еще внешне похожа на рукопись и достаточно трудна для чтения, а перевод Я.В. Брюса «Приемы циркуля и линейки» уже напечатано гражданской печатью и дополнено различными иллюстрациями.

2. Второй период – (1728-1797 гг.). Первое издание периода «Сокращение математическое…» Я. Германа, Ж.Н. Делиля (1728). Методические положения зафиксированы во введении к учебно-математическим изданиям, учебная книга представляла собой информационную модель конкретной математической дисциплины (например, арифметики) или совокупности дисциплин (например, арифметика, геометрия, тригонометрия).

Этот период тесно связан с деятельностью Л. Эйлера и его учеников (С.Я. Румовского, М.Е. Головина и др.). Издания создавались под значительным зарубежным влиянием или были переводными. Обращает на себя значительное число иностранцев среди авторов учебно-математической книги. Нередко сама книга пишется на иностранном языке, а затем переводится на русский, хотя она изначально создавалась для отечественной образовательной практики (Л. Эйлер, Г.Ф. Крафт и др.).

Авторами книг являются как ученые (Л. Эйлер, Я. Герман и др.), так и педагоги (М.Е. Головин, Д.Е. Войтяховский и др.)

Развитие учебной книги идет в направлении разработки содержания: публикуется перевод «Начал» Эвклида (И. Сатаров) и первая отечественная книга по алгебре (Н.Е. Муравьев). Образовательная практика связана с использованием рукописных книг, которые берут за основу печатные издания (Л.Ф. Магницкий, Я.В. Брюс).

Вторая половина периода (1764) ознаменована таким важным явлением как появление авторской линейки учебно-математических изданий. Д.С. Аничков (на основе зарубежных переводов) составляет книги, покрывающие все предметы курса математики (арифметику, алгебру, геометрию, тригонометрию).

3. Третий период – (1798-1863 гг.). Первая книга периода «Опыт о усовершении елементов геометрии» С.Е. Гурьева (1798), который ставит вопрос о научном фундаменте для разработки учебника геометрии. Период, когда методические знания уже обобщалась как некий набор рецептов и имел место переход к дидактическому принципу отбора материала для учебной книги вместо ранее имевшего информационного. Учебная книга уже не является только информационной моделью дисциплины (как на предыдущем периоде), а была встроена в учебный процесс. Изменение ориентиров в построении учебной литературы с контентуального дискурса на методическую составляющую: появление первых дидактических материалов, попытка развернуть тематику учебной книги, переводя ее с содержательной в методико-дидактическую плоскость. Появился новых жанр учебной литературы задачник.

Знаковым учебным изданием можно считать «Арифметические листки» (1832) П.С. Гурьева, которые представляли собой перечень задач для учащихся с ключом для учителя.

4. Четвертый период – (1864-1918 гг.). Начало периода связано с 1864 годом, в качестве реперной точки нами взят первый учебник А.Ю. Давидова, основателя феномена долгожительства в нашей учебно-математической литературе. Профессор Московского университета А.Ю. Давидов разрабатывает учебник геометрии, который сочетает в себе как выверенное математическое содержание, так и виды познавательной деятельности. Одновременно с учебником А.Ю. Давидова выходит первый учебник «малининской эпохи» в отечественной учебно-математической литературе (термин О.А. Саввиной): Малинин А.Ф. Руководство прямолинейной тригонометрии (1864). Авторами книг являются как ученые (А.Ю. Давидов, М.Е. Ващенко-Захарченко и др.), так и педагоги (А.Ф. Малинин, А.И. Гольденберг).

Учебные издания начинают разрабатываться с использованием методики обучения математике (методики арифметики, методика геометрии и т.д.), которая формируется уже как научное знание со своим предметом исследования. Появляется типовое многообразие различных жанров учебной книги. Возникает явление долгожительства, которое позволяет создать унифицированные учебные издания: одни и те же книги, предназначавшиеся для самых разных учебных заведений. Изменяются показатели

книгообеспеченности образовательного процесса: разрабатываются комплексы учебной литературы (учебник, задачник, решебник). Наблюдается интенсивный рост печатной продукции, в том числе и расширение географической локации изданий. Имел место окончательный отход от зарубежных заимствований.

Развитие учебно-математической печатной книги имело свою определенную внутреннюю логику, которая определялась закономерностями и тенденциями развития образования в целом, а также спецификой самого учебного предмета математики. Проведенное нами исследование позволяет на основе анализа исторического опыта, обобщенной в построенной периодизации, выделить следующие специфические тенденции развития учебно-математических изданий

1. Смена приоритетов: от зарубежных заимствований к отечественных наработкам и обратно.

2. Сосуществование традиций авторства изданий как теоретиками-математиками, так и учителями-практиками.

3. Поступательное, но нелинейное движение от единичных образцов первых изданий к видовому, жанровому и типовому многообразию, а затем к унификации.

Библиографический список

1. Филимонова, О.С. Основные тенденции исторического развития учебной литературы в России / О.С. Филимонова // Russian Journal of Education and Psychology. – 2015. – № 10(54). – С.170-181.

2. Саввина, О.А. "Малининская эпоха" в истории русского учебника математики / О. А. Саввина // Математика в школе/ -- 2013. – № 4. – С. 66-75

3. Полякова, Т.С. История математического образования в России / Т.С. Полякова. – 2-е изд. – М.: Ленанд, 2021. – 600 с.

4. Ромашина, Е.Ю. Школьный учебник конца XIX – начала XX века и его эмоционально-ценностная составляющая / Е.Ю. Ромашина // Образование и наука. 2006. № 1. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/shkolnyy-uchebnik-kontsa-xix-nachala-xx-veka-i-ego-emotsionalno-tsennostnaya-sostavlyayuschaya (дата обращения: 09.07.2025).

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 372.8

И.В. Кузнецова

Интеграция искусственного интеллекта в педагогические практики учителя математики: анализ возможностей, вызовов и перспектив

В статье проведен анализ трансформации педагогических практик учителя математики под влиянием технологий искусственного интеллекта (ИИ). Автор рассматривает ИИ в качестве катализатора эволюции профессиональной деятельности педагога, позволяющего перейти от выполнения рутинных операций к проектированию глубокого и персонализированного образовательного опыта. На конкретных примерах проанализированы возможности интеграции ИИ-инструментов в различные аспекты преподавания: дифференциацию обучения, организацию проектной деятельности и создание образовательного контента. Особое внимание уделено методологическим и профессиональным вызовам, а также новым компетенциям педагога в условиях цифровой трансформации образования.

Ключевые слова: *искусственный интеллект в образовании, педагогические практики, учитель математики, цифровая трансформация, профессиональные компетенции, персонализация обучения.*

I.V.Kuznetsova

Integration of artificial intelligence into the pedagogical practices of mathematics teacher: analysis of opportunities, challenges and prospects

The article analyzes the transformation of the pedagogical practices of a mathematics teacher under the influence of artificial intelligence (AI) technologies. The author considers AI as a catalyst for the evolution of a teacher's professional activity, allowing him to move

from performing routine operations to designing a deep and personalized educational experience. Using specific examples, the possibilities of integrating AI tools into various aspects of teaching are analyzed: differentiation of learning, organization of project activities and creation of educational content. Special attention is paid to methodological and professional challenges, as well as new teacher competencies in the context of digital transformation of education.

Key words: *artificial intelligence in education, pedagogical practices, mathematics teacher, digital transformation, professional competencies, personalization of learning.*

Технологии искусственного интеллекта, в особенности генеративные языковые модели, перестали быть предметом футуристических прогнозов и стали практической реальностью образовательной среды. Интеграция ИИ приводит к качественному переформатированию традиционных педагогических практик, затрагивая ключевые аспекты работы учителя [Глотова, Самохвалова, Мухлынина, 2023]. В связи с этим данная статья отвечает на следующие исследовательские вопросы:

1. Какие возможности предоставляют современные ИИ-инструменты для трансформации ключевых педагогических практик учителя математики?
2. Какие методологические ограничения и профессиональные вызовы порождает эта интеграция?
3. Какие новые компетенции определяют профессиональный успех учителя математики в условиях повсеместного распространения ИИ?

Проанализируем возможности современных ИИ-инструменты для трансформации ключевых педагогических практик учителя математики.

1. Цифровой арсенал педагога: обзор релевантных ИИ-инструментов.

Помимо широко известного ChatGPT, в арсенал современного учителя математики могут входить следующие инструменты:

- **GigaChat** (https://giga.chat/) – русскоязычная модель, эффективная для генерации задач и методических материалов.

- **Perplexity** (https://www.perplexity.ai/) – гибрид поисковой системы и чат-бота, идеальный для быстрого поиска актуальной информации и генерации текста из Интернета, анализа текста и выделения основных идей, решения математических и логических задач, необходимых для проектной и исследовательской деятельности обучающегося.
- **DeepSeek** (https://chat.deepseek.com/) – нейросеть, основанная на базе большой языковой модели с открытым исходным кодом, доступна на русском языке, позволяет анализировать информацию и генерировать тексты любой сложности, а в формате режима DeepSeek R1 анализирует с разных точек зрения, проверяя правильность рассуждения, решает сложные математические и инженерные задачи и др.
- **Yandex GPT** (https://ya.ru/ai/gpt) – модель, хорошо понимающая контекст, что полезно для создания сценариев уроков и диалогов.
- **Шедеврум** (shedevrum.ai) – сервис Яндекса для генерации контента (картинок, видео) с помощью нейросетей.
- **Mapify** (https://mapify.so) – онлайн-платформа на основе ИИ, предназначенная для преобразования любого контента в ментальные карты.
- **Gamma** (https://gamma.app/) – инструмент, основанный на ИИ, который облегчает создание увлекательных презентаций, документов и веб-страниц из текстовых подсказок. Используя передовой ИИ, Gamma помогает оптимизировать процесс дизайна, позволяя пользователям сосредоточиться на содержании, а не на форматировании.
- **Quizizz** (https://quizizz.com/quizizz-ai?lng=ru) – мощный инструмент для образования, который использует возможности искусственного интеллекта. Благодаря генерации и улучшению вопросов на базе ИИ учителя могут быстро разрабатывать персонализированные и интерактивные викторины, отвечающие потребностям всех своих учеников.
- **MagicSchool.ai** (https://app.magicschool.ai/tools) – платформа, разработанная для поддержки учителей в выполнении рутинных и трудоемких задач. С помощью более 70 инструментов

на основе искусственного интеллекта, платформа помогает автоматизировать такие процессы, как адаптация учебных материалов, создание оценок, написание индивидуальных образовательных программ и многое другое.

- **Visper.tech** (https://visper.tech) – нейросеть, способная генерировать видео на основе изображений и текста, позволяют создать цифрового аватара-диктора, синхронизированного с озвученным текстом.
- **Futurepedia** (https://www.futurepedia.io/) – бесплатный онлайн-каталог, который помогает находить лучшие инструменты и программное обеспечение ИИ для различных приложений.

Классифицируем эти инструменты по их основным функциям (табл. 1).

Таблица 1

Функциональная классификация ИИ-инструментов в работе учителя математики

Функция	**Содержание**	**Примеры ИИ-инструментов**
Автоматизация рутинных задач	Генерация вариантов заданий, контрольных работ; создание планов уроков, ментальных карт, сценариев; подготовка методических материалов.	ChatGPT, GigaChat, DeepSeek, MagicSchool.ai, Mapify, Gamma
Персонализация обучения	Создание дифференцированных заданий под уровень ученика; генерация упражнений для работы с конкретными ошибками.	Perplexity, DeepSeek, ChatGPT, Quizizz AI

Развитие креативности и мотивации	Генерация идей для проектов, математических головоломок, ребусов; создание практико-ориентированных контекстов для задач.	Все языковые модели (генерация идей), Leonardo.Ai, Шедеврум (создание иллюстраций)
Создание мультимедийного контента	Разработка визуалов (изображения, диаграммы, иконки); производство аудио- и видеоконтента (подкасты, анимированные объяснения).	Gamma (презентации), Visper.tech, Pictory (видео), Lovo.AI, Murf.ai (озвучка), Midjourney, Graphy, Canva (визуальный контент)

Данный инструментарий позволяет педагогу охватить все этапы образовательного процесса – от проектирования и подготовки до реализации и анализа результатов.

2. Анализ возможностей: трансформация педагогических практик.

Интеграция ИИ приводит к качественному переформатированию традиционных педагогических практик. Рассмотрим, как ИИ меняет привычные модели работы.

1. *Дифференциация и персонализация обучения.*

ИИ позволяет реализовать персональный подход к обучению, оказывая адресную помощь обучающимся [Бороненко, Федотова, 2024]. Традиционная модель создания ограниченного числа вариантов заданий является ресурсоемкой и недостаточно гибкой. Инструменты ИИ могут генерировать упражнения на основе анализа ошибок конкретного ученика. Ключевым элементом становится формулировка точного промпта, например: «Действуй как учитель математики. Ученик 9 класса ошибся в решении неравенства $(x - 3)/(x + 5) > 0$, неправильно определив знаки на интервалах. Сгенерируй 5 новых неравенств аналогичной структуры с разными параметрами a и b. Для каждого предоставь

подробное решение с правильным расставлением знаков на числовой прямой». Таким образом, учитель переходит от рутинного создания вариантов к роли диагностика и проектировщика индивидуальных образовательных траекторий.

Для разработки индивидуальных заданий можно использовать конструктор рабочих листов MagicSchool.ai. Этот инструмент позволяет моментально создавать качественные и профессиональные задания, адаптированные под конкретные темы и учебные цели, что значительно экономит время на подготовке к урокам.

Для адаптации учебного процесса под индивидуальные потребности каждого ученика учитель может разработать ментальные карты, которые являются не просто красивым конспектом, а инструментом визуального структурирования знаний, который идеально подходит для персонализации обучения, помогает учащимся бороться с фрагментарностью знаний и видеть математику как единую, живую науку.

Остановимся подробно на разработке ментальных карт. Прежде чем открывать сервис, учитель должен определить дидактическую цель карты:

- Обзорная: дать общую картину большой темы (например, «Вся тригонометрия за 10 класс»).
- Объясняющая: разобрать конкретное понятие (например, «Производная функции»).
- Сравнительная: сопоставить два объекта (например, «Ромб и Квадрат»).
- Алгоритмическая: визуализировать последовательность действий (например, «Алгоритм решения квадратного уравнения») (рис.1).
- Проблемная: организовать мозговой штурм по решению нестандартной задачи.

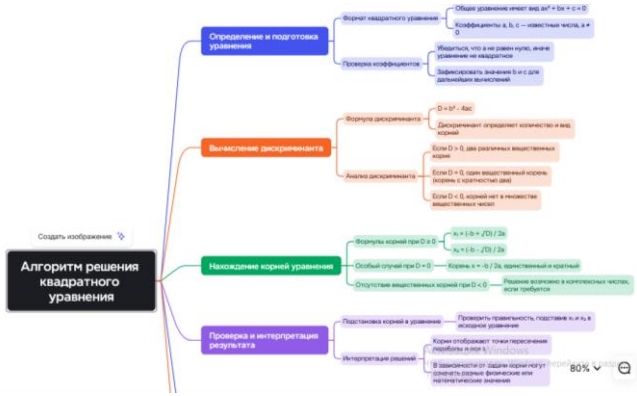


Рис. 1. Фрагмент ментальной карты на тему «Алгоритм решения квадратного уравнения», созданный в Mapify

Эффективное построение ментальной карты по математической дисциплине требует следования ряду ключевых дидактических и визуальных принципов, которые трансформируют ее из простого набора фактов в мощный инструмент систематизации знаний.

Фундаментальным элементом карты является центральный образ. Он должен быть не просто текстовым обозначением темы, а визуально ярким и концептуальным ядром, активирующим ассоциативное мышление. От центрального образа необходимо выстраивать четкую иерархию и ветвление, двигаясь от общих понятий к частным. Основные ветви первого уровня должны соответствовать крупным смысловым блокам темы (например, «Определения», «Формулы», «Теоремы», «Методы решения»), которые, в свою очередь, детализируются на ветвях последующих уровней. Это позволяет отразить логическую структуру математического знания. Для усиления когнитивного эффекта и быстрой навигации необходимо использование цветового кодирования и системы значков.

Важнейшим принципом является лаконичность. Текст на ветвях должен состоять из ключевых слов и коротких тезисов, а не развернутых предложений. Это способствует лучшему запоминанию и не перегружает визуальное пространство карты.

Наконец, ключевым преимуществом цифровых ментальных карт является возможность использования гиперссылок и вложений, что превращает статичную схему в интерактивную образовательную среду. Элементы карты можно и нужно связывать с дополнительными ресурсами:

- Прикреплять файлы с полными доказательствами теорем и подробными решениями задач.
- Добавлять ссылки на видеолекции, поясняющие сложные концепции.
- Интегрировать интерактивные графики из специализированных математических сред, таких как GeoGebra, для визуализации зависимостей.
- Обеспечивать доступ к онлайн-тестам для немедленного применения и проверки усвоенных знаний.

Таким образом, соблюдение данных принципов позволяет создать не просто схему, а многослойную, интерактивную когнитивную модель математической темы.

2. Организация проектной и исследовательской деятельности.

При традиционном подходе идеи для проектов ограничены опытом учителя и учеников. ИИ может быть генератором гипотез и идей.

Приведем конкретный пример и промпт.

Промпт для ИИ: «Действуй как учитель математики. Предложи 5 идей для исследовательских проектов по математике для учеников 10 класса, связывающих тему «Логарифмическая функция» с музыкой, архитектурой, финансами. Опиши возможный план работы для одного из проектов».

Трансформация практики происходит за счет того, что учитель становится тьютором-модератором, который курирует процесс отбора, критической оценки и реализации сгенерированных идей.

3. Практика геймификации образовательного процесса.

ИИ способен помочь учителю в разработке игровых механик, сценариев веб-квеста при изучении определенной темы по математике для повышения мотивации учащихся.

Приведем конкретный пример и промпт.

Промпт для ИИ: «Действуй как учитель математики. Какие игровые механики можно использовать в обучении теме «Квадратные уравнения», целевая аудитория которого – это учащиеся 8 класса. Предложи игровые механики, предложи серию игровых задач на развитие логического мышления».

Quizizz AI – это революционный инструмент для педагогов, стремящихся сэкономить время и создать более увлекательный учебный процесс. Благодаря генерации и улучшению вопросов на базе ИИ учителя могут быстро разрабатывать персонализированные и интерактивные викторины, отвечающие потребностям всех своих учеников.

4. Создание интерактивного и мультимедийного контента.

Возможности ИИ наиболее ярко проявляются в креативном дизайне образовательной среды. Технологический процесс создания презентации, подкаста или видеоурока разбивается на этапы (генерация идеи/сценария, создание визуала/озвучки, финальный монтаж), каждый из которых поддерживается специализированными ИИ-инструментами (Gamma, Leonardo.Ai, Lovo.AI, Visper.tech). Это позволяет педагогу, не обладающему узкопрофессиональными навыками дизайнера или видеомонтажера, создавать качественный и конкурентоспособный контент, концентрируясь на его методическом наполнении.

Рассмотрим этапы и инструменты подготовки презентаций (от идеи до готового слайда).

ИИ не просто делает слайды красивее, он помогает структурировать мысль и визуализировать сложные понятия.

1. Генерация идеи и структуры (содержательное ядро).

Инструменты: ChatGPT, Perplexity, DeepSeek и др.

Пример промпта: разработай подробный план презентации для урока алгебры в 9 классе на тему "Квадратичная функция и ее свойства". Включи цели урока, разбей на смысловые блоки (определение, график, свойства, применение), предложи 3 интерактивных задания для класса и 2 идеи для самостоятельной работы.

Результат: Готовая логическая структура, которую осталось только наполнить контентом.

2. Создание визуального контента для слайдов (генерация изображений и диаграмм).

Инструменты: Midjourney, Graphy, Canva (AI-функции).

Пример промпта для генерации параболы: создай изображение параболы, похожей на траекторию брошенного мяча на фоне школьной доски, в стиле научной иллюстрации, ярко и понятно.

Создание иконок и иллюстраций.

Инструменты: Leonardo.Ai.

Пример промпта: нарисуй дружелюбную иконку в стиле плоского дизайна на тему «Теорема Виета» (рис.2).

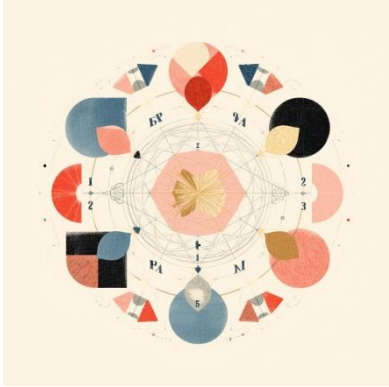


Рис.2. Пример иконки на тему «Теорема Виета», созданная нейросетью Leonardo.Ai

3. Дизайн и верстка самой презентации.

Инструменты: Gamma.ai

Как это работает: Вы предоставляете программе текст, а она автоматически генерирует набор слайдов с гармоничным дизайном, анимацией и подобранными визуальными элементами (рис.3). Это убирает необходимость часами подбирать шрифты, цвета и разметку.

ИИ можно использовать для создания подкастов и аудиоконтента. Аудиоформат отлично подходит для объяснения сложных тем, повторения перед контрольной или для проектной работы учеников.

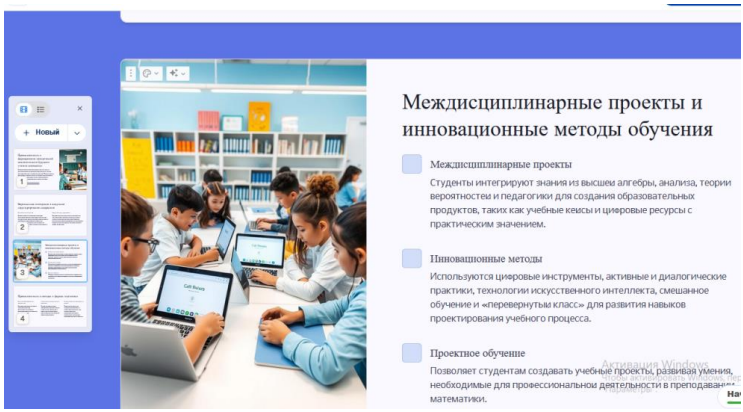


Рис.3. Создание презентации в Gamma.ai

Этапы работы и инструменты.

1. Написание сценария и диалога.

Инструменты: DeepSeek, ChatGPT.

Пример промпта: напиши сценарий для 5-минутного образовательного подкаста для учеников 7 класса на тему «Почему мы не можем делить на ноль?». Сценарий должен быть в формате диалога между любопытным учеником и объясняющим учителем. Объяснение должно быть образным, с примерами из жизни.

Результат: готовый, выверенный текст для озвучки.

2. Озвучка текста (Синтез речи).

Инструменты: Lovo.AI, Murf.ai.

Как это работает: Вы копируете готовый сценарий в сервис, выбираете голос (даже можно клонировать свой), настраиваете темп и эмоциональность речи — и получаете чистый аудиофайл. Это идеально для создания безшумных, профессионально звучащих дикторских дорожек.

3. Обработка и сведение аудио (устранение шума, монтаж).

Инструменты: Adobe Podcast (AI-удаление шума и улучшение качества).

Пример использования: учитель записал вступление в классе, но на фоне был шум. ИИ-инструмент за секунды убирает фоновый гул, делая запись чистой.

Крайне перспективным направлением является использование генеративного искусственного интеллекта для создания комплексного видеоконтента. Данный формат, являясь наиболее ресурсоемким, одновременно демонстрирует и высочайшую эффективность воздействия на аудиторию. Технологический процесс начинается с фундаментального этапа – создания детального сценария и раскадровки, где акцент смещается с аудиального на визуальное восприятие, аналогично производству подкаста, но с обязательной проработкой визуального ряда. Для этого эффективно применяются языковые модели, такие как DeepSeek, для которых формируется промпт следующего типа: «Напиши сценарий для 3-минутного видеоурока о подобии треугольников, предусмотрев для каждой смысловой части конкретные визуальные решения: графику, анимацию, текстовые вставки».

Следующей фазой является непосредственная генерация видеоряда, для чего используется спектр специализированных инструментов. Платформы типа Visper.tech – нейросеть, способная генерировать видео на основе изображений и текста, позволяют создать цифрового аватара-диктора, синхронизированного с озвученным текстом (рис.4), в то время как сервисы вроде Pictory или InVideo.io осуществляют трансформацию текстового сценария или статьи в динамичный видеоряд с использованием заготовленных шаблонов и нейросетевых моделей.

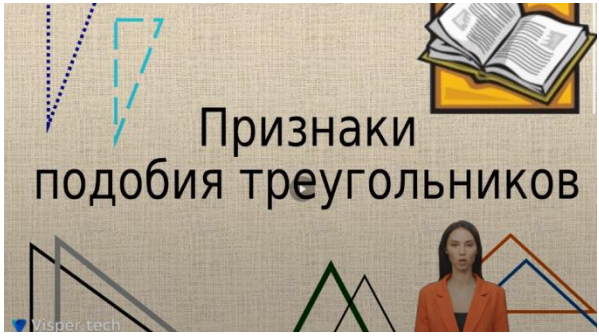


Рис.4. Видео, созданное с помощью Visper.tech

Практическим результатом данного этапа может стать видео, в котором AI-аватар, исполняющий роль преподавателя, объясняет теоретический материал, в то время как на фоне в реальном времени генерируются и появляются соответствующие теме схемы, графики и иллюстрации.

Несмотря на стремительное развитие технологий, современные генеративные системы искусственного интеллекта обладают рядом фундаментальных ограничений, которые необходимо учитывать в образовательном контексте. Прежде всего, важно понимать, что ИИ лишен истинного понимания решаемых задач. В своей основе он оперирует не смыслами, а статистическими закономерностями в последовательностях символов, предсказывая наиболее вероятные варианты продолжения текста. Эта архитектурная особенность является причиной двух ключевых проблем: способности совершать грубые математические ошибки в вычислениях и склонности к генерации правдоподобного, но семантически ложного контента, известного как «галлюцинации». Следовательно, ИИ не может быть надежным источником точных вычислений или проверенных фактов – его сила заключается в генерации идей и текстов, а не в их верификации.

Эффективность работы с ИИ напрямую зависит от качества запроса (промпта), что порождает проблему профессиональной компетентности. Результат взаимодействия с моделью на 90% определяется способностью пользователя корректно и детально сформулировать задачу, выделив контекст, цель и критерии результата. Эти технологические ограничения порождают серьезные педагогические риски. Главный из них – потенциальная деградация фундаментальных навыков как у учащихся, так и у педагогов. Слепое доверие к результатам работы ИИ и делегирование ему когнитивных функций может привести к атрофии способности к критическому мышлению, глубокому анализу и самостоятельному решению задач. Второй риск связан с «выключением учителя» из образовательного процесса, когда технология ошибочно воспринимается как автономная замена педагогическому мастерству, а не инструмент для его усиления. Наконец, возникает проблема цифрового неравенства, поскольку доступ к наиболее мощным и продвинутым версиям ИИ-систем часто является платным,

что может усугубить разрыв в качестве образования между разными учебными заведениями и социальными группами.

В связи с этим, роль педагога претерпевает трансформацию, но не утрачивает своей значимости. Учитель должен выступать в новой триединой роли: редактора, куратора и эксперта.

1. Функция редактора предполагает обязательную проверку всех фактов, данных и вычислений, сгенерированных ИИ. Педагог несет ответственность за содержательную точность и достоверность контента.

2. Функция куратора заключается в адаптации сырого сгенерированного контента под конкретные педагогические задачи. Учитель обогащает материал личным опытом, добавляет акценты, поясняющие метафоры, юмор и примеры, релевантные конкретному классу, выстраивая тем самым эмоциональный контакт и обеспечивая понимание.

3. Функция эксперта состоит в сохранении и усилении уникального человеческого компонента – личности педагога. Самый эффективный образовательный контент – это тот, в котором видна авторская позиция и индивидуальность. ИИ служит инструментом для усиления этой уникальности, освобождая время для творчества и персонализации, но не для ее замены.

Интеграция искусственного интеллекта в педагогические практики учителя математики представляет собой не замену педагога, а переход его деятельности на качественно новый уровень [Новичихин, 2023]. Анализ показал, что ИИ предоставляет беспрецедентные возможности для персонализации, креативного дизайна среды и автоматизации, его внедрение сопряжено с серьезными рисками, связанными с достоверностью информации, цифровым неравенством и сохранением фундаментальных учебных навыков.

Ключевым фактором успешной интеграции становится развитие не технической грамотности, а критического педагогического мышления – способности эффективно и рефлексивно использовать возможности ИИ для усиления, а не подмены, профессионального мастерства [Кузнецова, Тихомиров, Кытманов, Тихомиров, Трошина, 2014].

Таким образом, современный учитель математики использует ИИ как мощный инструмент для расширения дидактических возможностей и усиления своего профессионального воздействия.

Библиографический список

1. Бороненко Т.А., Федотова В.С. Развитие персонализированного обучения будущих педагогов через генерацию курсов с использованием искусственного интеллекта // Мир науки, культуры, образования. 2024. № 4(107). С. 29-33.

2. Глотова М.Ю., Самохвалова Е.А., Мухлынина О.А. Развитие навыков в области нейросетевых технологий для будущих педагогов: возможности и преимущества // Наука и школа. 2023. № 5. С. 162-172.

3. Новичихин, И. С. Применение искусственного интеллекта в образовательном процессе / И. С. Новичихин // Информационные технологии в образовательном процессе вуза и школы: Материалы XVII Всероссийской научно-практической конференции, Воронеж, 29 марта 2023 года / Редколлегия: Р.М. Чудинский (науч. ред.), В.В. Малев, А.А. Малева (отв. ред.), М.В. Дюжакова, С.О. Башарина. – Воронеж: Воронежский государственный педагогический университет, 2023. С. 305-309.

4. Кузнецова И.В., Тихомиров А.С., Кытманов А.А., Тихомиров С.А., Трошина Т. Л. Формирование методической компетентности будущего учителя математики на основе фундирования опыта студентов в сетевом сообществе // Ярославский педагогический вестник. 2014. Т. 2, № 3. С. 68-72.

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 378.14

Л. П. Латышева, А. Ю. Скорнякова, Е. Л. Черемных

О подготовке будущих учителей математики и информатики к реализации технологии профессионального самоопределения школьников

В статье рассматривается опыт подготовки на математическом факультете педвуза студентов бакалавриата и магистратуры к реализации технологии профессионального самоопределения школьников. Раскрываются пути формирования необходимых будущим учителям математики и информатики компетенциий, в том числе привлечением их к созданию специальных рабочих листов для обучающихся. Особенностью таких листов являются компетентностно-ориентированные задания, содержание которых отражает потенциал профессионально-образовательных кластеров по приоритетным направлениям научно-технологического развития страны или региона.

Публикация подготовлена в рамках государственного задания Министерства Просвещения РФ по теме «Технологии профессионального самоопределения школьников в содержании школьного курса физики, химии, биологии и информатики» (код научной темы KPZU-2025-0009, соглашение 073-03-2025-061/1 от 20.03.2025 г.).

Ключевые слова: *подготовка учителей математики, подготовка учителей информатики, профессиональное самоопределение школьников.*

L. P. Latysheva, A. Yu. Skornyakova, E. L. Cheremnykh

On the training of future mathematics and computer science teachers to implement the technology of professional self-determination of schoolchildren

The article discusses the experience of training undergraduate and graduate students in the mathematics department of a pedagogical university to implement the technology of professional self-determination for

schoolchildren. The article reveals the ways of forming the competencies necessary for future teachers of mathematics and computer science, including their involvement in creating special worksheets for students. These worksheets feature competency-based tasks that reflect the potential of professional and educational clusters in the priority areas of scientific and technological development in the country or region.

The publication was prepared as part of the state assignment of the Ministry of Education of the Russian Federation on the topic "Technologies of Professional Self-Determination of Schoolchildren in the Content of the School Course of Physics, Chemistry, Biology, and Computer Science" (scientific topic code KPZU-2025-0009, agreement 073-03-2025-061/1 dated March 20, 2025).

Key words: *training of mathematics teachers, training of computer science teachers, and professional self-determination of students.*

В настоящее время перед учителями стоит задача не только обеспечения сформированности предметных умений школьников, но и организации деятельности по их профессиональной ориентации. Стремительное развитие технологий и широкий спектр востребованных в обществе специальностей, таких, как программист, инженер, аналитик и др., делает эту задачу особенно актуальной в процессе преподавания математики и информатики, что требует подготовки соответствующих учителей-предметников к оказанию содействия в реализации учащимися осознанного выбора профессии.

Профессиональное самоопределение школьников – сложный процесс, требующий длительного педагогического сопровождения по формированию у обучающихся осознанного выбора профессии (например, связанной с математикой и IT), развитию ключевых компетенций (например, в сфере алгоритмизации и программирования, аналитического мышления, работы с данными). Поэтому при подготовке будущих учителей математики и информатики в педагогическом вузе важно акцентировать их внимание на возможности интеграции технологии профессиональной профориентации в учебный процесс (путем рассмотрения реальных задач из IT-сферы, знакомства с профессиями через учебные кейсы); включать студентов в совместную проектную деятельность со школьниками по разработке продуктов, связанных с анализом данных, робототехникой и др.; взаимодействовать с вузами и IT-компаниями, в частности, при

реализации технологии образовательного туризма для привлечения обучающихся к экскурсиям, тематическим мастер-классам, встречам со специалистами предприятий.

Некоторые исследователи проблемы реализации профессионального самоопределения школьников связывают её решение с концентрацией вокруг единой профориентационной цели образовательных, воспитательных, дополнительных общеобразовательных общеразвивающих программ, программ ресурсных центров профориентационной направленности. Это обеспечивает непрерывность и преемственность педагогического сопровождения формирования профессионального самоопределения школьников различных возрастных групп, взаимодействие всех субъектов образовательных отношений и социальных партнеров [2].

В Пермском государственном гуманитарно-педагогическом университете (ПГГПУ) имеется опыт освоения будущими учителями технологии профессионального самоопределения школьников, реализованный при обучении студентов бакалавриата и магистратуры математического факультета, обучающихся по профилям «Математика и информатика» и «Математика и цифровые образовательные технологии», соответственно. Для формирования у будущих учителей необходимых компетенций были использованы следующие возможности:

- включение в учебный план образовательной программы специального модуля «Профессиональное самоопределение школьников на уроках»;
- организация производственных стажерских практик в школах с условием проведения студентами-практикантами профориентационных мероприятий;
- рекомендация в преподавании курсов «Методика обучения математике», «Методика обучения информатике» акцентировать внимание на разработке профориентационных элементов урока (связанных с приведением примеров из реальных профессий, рассмотрением элементов геймификации с использованием математических квестов, хакатонов и др.);
- привлечение студентов к организации производственных экскурсий школьников (в IT-компании, технопарки, университетские лаборатории), встреч с экспертами, вебинаров с представителями профессий.

Кроме вышеперечисленного для подготовки к реализации технологии профессионального самоопределения школьников будущих учителей полезно привлекать к созданию рабочих листов, содержащих специальные компетентностно-ориентированные задания [1, 3]**. Например, в результате совместной работы студентов и преподавателей ПГГПУ составлена следующая структура рабочего листа по математике и информатике для школьника:**

- заглавие рабочего листа (тема, характеризующая суть заданий);
- учебный предмет, класс;
- тема урока из федеральной рабочей программы (https://edsoo.ru/rabochie-programmy/);
- перечень предприятий региона с указанием вакансий и соответствующей информации о них, доступной по qr-коду;
- перечень профессий, для которых актуален сюжет заданий рабочего листа;
- перечень учреждений среднего профессионального и высшего образования, в которых можно обучиться на охарактеризованные в приведенном перечне профессии;
- постановка компетентностно-ориентированных заданий с описанием ситуации, связанной с реальным предприятием региона;
- историческая справка (из истории профессии в регионе, о каком-либо тематическом памятнике в Пермском крае);
- ссылка на возможность повторения теории для выполнения заданий рабочего листа;
- перечень необходимого оборудования и программного обеспечения;
- этапы выполнения работы;
- контрольные вопросы, позволяющие проанализировать (оценить) точность результата, провести самоанализ;
- выводы из проделанной в ходе выполнения заданий работы.

Составленный в соответствии с вышеуказанной структурой рабочий лист по информатике представлен на рисунках 1, 2.



Рабочий лист по предмету «Информатика».
8 класс – углубленный уровень, 9 класс – базовый уровень

Тема из профессиональной сферы «Аналитика данных» (визуализация данных производства в электронных таблицах)	Тема из федеральной рабочей программы (8 класс – углубленный уровень, 9 класс – базовый уровень) «ЭЛЕКТРОННЫЕ ТАБЛИЦЫ. ПОСТРОЕНИЕ ДИАГРАММ (ГИСТОГРАММА, КРУГОВАЯ ДИАГРАММА, ТОЧЕЧНАЯ ДИАГРАММА)»

ПРЕДПРИЯТИЯ ПЕРМСКОГО КРАЯ
ПАО «Мотовилихинские заводы» http://mzperm.ru/

ПРОФЕССИИ
- аналитик данных (анализ показателей, построение отчётов, выявление проблем производства);
- инженер КИПиА (Контроль автоматизированных систем, обслуживание датчиков);
- Технолог (оптимизация производственных процессов, контроль качества)

УЧРЕЖДЕНИЯ СПО/ВО
- Пермский политехнический колледж имени Н.Г. Славянова, https://ppkslavyanova.ru/
- ПНИПУ (профиль «Автоматизация технологических процессов»), https://pstu.ru/
- ПГНИУ (Прикладная математика и информатика) http://www.psu.ru/
- ПГГПУ (Информационные системы и технологии) https://pspu.ru/

Учебная ситуация

Вы — стажёр отдела аналитики Мотовилихинских заводов. Вам передали данные по выпуску деталей за неделю. Задача: создать интерактивный отчёт с использованием электронных таблиц («МойОфис Таблица», LibreOffice Calc и др.) с диаграммами для совещания с руководством.

Исходные данные

День рабочей недели	Количество выпущенной продукции в цехе №1 (шт.)	Количество выпущенной продукции в цехе №2 (шт.)	Общее количество бракованных изделий (шт.)
Пн	120	95	5
Вт	135	88	7
Ср	110	102	4
Чт	125	98	6
Пт	142	105	3

Историческая справка

В 1894 году Мотовилихинские заводы первыми в России внедрили систему статистического учёта производства. Инженер Василий Гавриков разработал методику анализа брака, снизив потери на 37%. Сегодня эти принципы лежат в основе цифровых систем управления качеством.

Музей пермской артиллерии ОАО «Мотовилихинские заводы» – музей, представляющий историю развития предприятия с момента принятия Петром Первым решения о строительстве на Урале медеплавильных заводов до наших дней.

https://rutube.ru/video/d02fdabf633b7d39a83f28b128a1cd20/?t=plrel

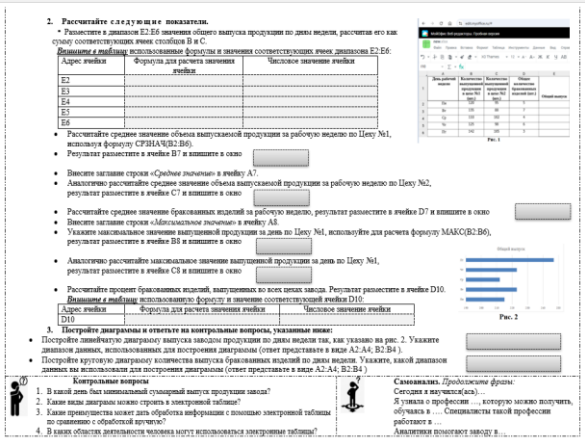
Повтори теорию

Работа с табличным редактором «МойОфис Таблица» https://myoffice.ru/materials/tutorials/rabota-s-tablichnym-redaktorom-myoffice-spreadsheet/
Видео о том, как создать таблицу и работать с ней в «МойОфис» https://rutube.ru/video/ae78ec6a454e4859a7b332a76ed03190/?t=plrel
Технологии обработки табличной информации в *LibreOffice Calc* https://books.ifmo.ru/file/pdf/2028.pdf

Задания

1. **Внесите в электронную таблицу исходные данные (при выполнении задания можно воспользоваться пробной версией веб-редакторов «МойОфис» https://edit.myoffice.ru/):**
   - создайте файл в электронных таблицах, разместив исходные данные в таблицу, начиная с левого верхнего угла (ячейки A1:D6);
   - добавьте столбец, разместив его заголовок «*Общий выпуск*» в E1 (см. рис. 1.);

Рис. 1. Первая страница рабочего листа по информатике



2. Рассчитайте следующие показатели.

- Разместите в диапазон E2:E6 значения общего выпуска продукции по дням недели, рассчитав его как сумму соответствующих ячеек столбцов B и C.

Внесите в таблицу использованные формулы и значения соответствующих ячеек диапазона E2:E6:

Адрес ячейки	Формула для расчета значения ячейки	Числовое значение ячейки
E2		
E3		
E4		
E5		
E6		

- Рассчитайте среднее значение объема выпускаемой продукции за рабочую неделю по Цеху №1, используя формулу СРЗНАЧ(B2:B6).
- Результат разместите в ячейке B7 и впишите в окно
- Внесите заглавие строки «*Среднее значение*» в ячейку A7.
- Аналогично рассчитайте среднее значение объема выпускаемой продукции за рабочую неделю по Цеху №2, результат разместите в ячейке C7 и впишите в окно
- Рассчитайте среднее значение бракованных изделий за рабочую неделю, результат разместите в ячейке D7 и впишите в окно
- Внесите заглавие строки «*Максимальное значение*» в ячейку A8.
- Укажите максимальное значение выпущенной продукции за день по Цеху №1, используйте для расчета формулу МАКС(B2:B6), результат разместите в ячейке B8 и впишите в окно
- Аналогично рассчитайте максимальное значение выпущенной продукции за день по Цеху №1, результат разместите в ячейке C8 и впишите в окно
- Рассчитайте процент бракованных изделий, выпущенных во всех цехах завода. Результат разместите в ячейке D10.

Впишите в таблицу использованную формулу и значение соответствующей ячейки D10:

Адрес ячейки	Формула для расчета значения ячейки	Числовое значение ячейки
D10		

3. Постройте диаграммы и ответьте на контрольные вопросы, указанные ниже:

- Постройте линейчатую диаграмму выпуска заводом продукции по дням недели так, как указано на рис. 2. Укажите диапазон данных, использованных для построения диаграммы (ответ представьте в виде A2:A4; B2:B4).
- Постройте круговую диаграмму количества выпуска бракованных изделий по дням недели. Укажите, какой диапазон данных вы использовали для построения диаграммы (ответ представьте в виде A2:A4; B2:B4)

Контрольные вопросы

1. В какой день был минимальный суммарный выпуск продукции завода?
2. Какие виды диаграмм можно строить в электронной таблице?
3. Какие преимущества может дать обработка информации с помощью электронной таблицы по сравнению с обработкой вручную?
4. В каких областях деятельности человека могут использоваться электронные таблицы?

Самоанализ. *Продолжите фразы.*
Сегодня я научился(ась)…
Я узнала о профессии …, которую можно получить, обучаясь в …. Специалисты такой профессии работают в ….
Аналитики помогают заводу в…

Рис. 2. Вторая страница рабочего листа по информатике

Таким образом, подготовка будущих учителей математики и информатики к реализации технологии профессионального самоопределения школьников требует системного подхода. Интеграция профориентационных компетенций в педагогическое образование позволит выпускникам вузов эффективно сопровождать учащихся в выборе профессии, повышать их мотивацию к изучению математики и информатики.

Библиографический список

1. Латышева Л.П. Об обучении будущих учителей математики в дистанционном формате с применением компетентностно-ориентированных заданий / Л.П. Латышева, А.Ю. Скорнякова, Е.Л. Черемных // Математика и математическое образование: проблемы, технологии, перспективы: Материалы 42-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов, Смоленск, 12-14 октября 2023 года. – Смоленск: Смоленский государственный университет, 2023. С. 152-155.

2. Ненилин С.Н. Взаимодействие субъектов образовательных отношений по формированию профессионального самоопределения школьников в информационно-образовательной среде моногорода / С.Н. Ненилин // Вестник Кемеровского государственного университета. Серия: Гуманитарные и общественные науки. 2023. Т. 7, № 3(27). С. 298-309.

3. О непрерывной подготовке учителей математики / Л.П. Латышева, В.Н. Павелкин, А.Ю. Скорнякова, Е.Л. Черемных // Наставничество в математике и в математическом образовании: Материалы международной научно-практической конференции, посвященной 120-летию со дня рождения академика А.Н. Колмогорова, Киров, 14-15 сентября 2023 года. Киров: Вятский государственный университет, 2023. С. 90-98.

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 372.851: 514

Н.В. Леонтьева

Построение куба по его диагонали: теоретический и методический аспект

Обучение школьников конструктивной геометрии в пространстве предполагает решение различных задач. В статье рассмотрен пример задачи на построение куба по его диагонали. Решение задачи основано на расширенной схеме, включающей в себя визуализацию, анализ, построение, доказательство, исследование, динамическое конструирование. Обсуждение методических аспектов позволяет организовать работу со школьниками в процессе решения данной задачи.

Ключевые слова: *конструктивная геометрия в пространстве, построение куба, методика обучения математике, обучение решению задач, расширенная схема решения задачи на построение.*

N.V. Leont'eva

Cube constructive along its diagonal: theoretical and methodical aspect

Spatial constructive geometry schoolchild learning assumes different tasks decision. In this article the issue example about cube constructive along its diagonal are reviewed. Task decision is based on extended scheme including visualization, analysis, constructive, proof, research and dynamic construction. Methodical aspects discussion allows to organize schoolchildren learning on this task decision process.

Key words: *spatial constructive geometry, cube construct, mathematics learning methods, tasks decision learning, constructive issue decision extended scheme.*

Основой обучения школьников конструктивной геометрии в пространстве являются различные задачи. Обратим внимание методические особенности организации работы со школьниками в процессе решения следующей задачи.

Постройте куб, если известна длина его диагонали.

Решение задачи будем оформлять в соответствии с расширенной схемой, представленной в работе [Леонтьева].

Визуализация. Исходными данными в данной задаче является диагональ куба *d*. Для того, чтобы определить положение куба в пространстве, выберем произвольную прямую *f*, на которой будет построена диагональ куба. На построенной прямой выберем точку *O* – центр куба.

Предварительно докажем следующее утверждение.

Плоскость AB_1D_1 перпендикулярна диагонали A_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и делит его в отношении 1: 2.

Доказательство. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости достаточно найти две пересекающиеся прямые, лежащие в AB_1D_1 и перпендикулярные диагонали A_1C. Покажем, что диагональ грани перпендикулярна диагонали куба.

Известно, что диагонали куба пересекаются в одной точке и делятся ей пополам [Выгодский, с. 306]. Обозначим эту точку *O*. Через середину *Q* ребра BB_1, точки A_1 и *C* проведем плоскость. Пусть ребро DD_1 пересекает плоскость QA_1C в точке *R*. По построению пары прямых A_1Q и *RC*, а также A_1R и *QC* параллельны. Из равенства прямоугольных треугольников *BQC* и B_1QA_1 по двум катетам следует равенство отрезков $QC = QA_1$. Сказанное позволяет сделать вывод, что четырехугольник QA_1RC – ромб.

По свойствам ромба прямые A_1C и *QR* перпендикулярны. По построению точка *R* является серединой отрезка DD_1. Соответственно, диагональ грани B_1D_1 параллельна прямой *QR*. Итак, диагональ куба A_1C перпендикулярна диагонали грани B_1D_1. Аналогично можно показать, что диагональ грани B_1A перпендикулярна A_1C. Таким образом, плоскость B_1D_1A перпендикулярна указанной диагонали. Обозначим *W* точку пересечения B_1D_1A и A_1C. Определим отношение, в котором данная точка делит диагональ куба.

Пусть a – сторона куба, тогда длина диагонали грани куба равна $\sqrt{2}a$, длина диагонали куба – $\sqrt{3}a$.

Вычислим объем треугольной пирамиды $BB_1A_1C_1$ двумя способами. В первом случае он равен $V = \frac{1}{3}S_{B_1A_1C_1} \cdot BB_1 = \frac{1}{3}a^3$. Иначе объем найдем по формуле $V = \frac{1}{3}S_{BA_1C_1} \cdot A_1W$. Треугольник BA_1C_1 равносторонний, $S_{BA_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot 2a^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

Таким образом, $A_1W = \frac{3V}{S_{BA_1C_1}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{6}a^3}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$. Точка W делит диагональ B_1D в отношении 1: 2.

Применим доказанное утверждение к поиску решения задачи.

Анализ. Предположим, что искомый куб, длина диагонали которого равна d, построен. Все вершины лежат на описанной около куба сфере. Две вершины данной диагонали можно считать известными. Остальные шесть вершин по доказанному утверждению будут лежать в перпендикулярных к диагонали плоскостях, находящихся на расстоянии $\frac{d}{6}$ от точки O. В таком случае они лежат на окружностях пересечения построенных плоскостей и описанной сферы и образуют равносторонние треугольники.

Выбор на построенной окружности одной из вершин позволяет построить все остальные вершины.

Дополнительное построение. Во вспомогательной плоскости построим отрезок $XY = d$, определяющий длину диагонали куба. В пространстве построения проведем прямую f и выберем на ней точку O.

Основное построение.

1. Построим сферу Ω_1 с центром в точке O и радиусом $\frac{d}{2}$. В пересечении с прямой f найдем точки B_1 и D.

2. Через точку O проведем плоскость ρ, перпендикулярную прямой f.

3. Отложим от точки O на прямой f точки W_1 и W_2 так, чтобы $OW_1 = OW_2 = \frac{d}{6}$.

4. Через точки W_1 и W_2 проведем плоскости σ_1 и σ_2 перпендикулярно прямой f соответственно.

5. Сфера Ω_1 пересекает построенные плоскости σ_1 и σ_2 по окружностям ω_1 и ω_2 соответственно.

6. Через произвольную прямую g, принадлежащую плоскости ρ, и прямую d проведем плоскость τ.

7. В пересечении плоскости τ с окружностью ω_1 построим точку A_1, с окружностью ω_2 – точку C. Выберем указанные точки так, чтобы они лежали по разные стороны от прямой f. Проведем прямые A_1B_1 и CD.

8. Через точку B_1 проведем плоскость τ_1 перпендикулярно A_1B_1, через точку D – плоскость τ_2 перпендикулярно CD.

9. Найдем линию g_1 пересечения плоскостей τ_1 и σ_1, линию g_2 пересечения плоскостей τ_2 и σ_2.

10. Прямая g_1 пересекает окружность ω_1 в точках D_1 и A. Соответственно прямая g_2 пересекает окружность ω_2 в точках C_1 и B.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – искомый куб.

Доказательство. По построению плоскости σ_1 и σ_2 делят диагональ B_1D на три равные части, $B_1W_1 = W_2D = \frac{d}{3}$. Точки B_1, A_1, C и D лежат в одной плоскости τ. Радиусы окружностей ω_1 и ω_2, лежащих в параллельных плоскостях, центры которых равноудалены от центра сферы, равны. Из прямоугольного треугольника OW_1A_1 по теореме Пифагора найдем, что искомые радиусы $W_1A_1 = W_2C = \frac{\sqrt{2}d}{3}$.

Прямоугольные треугольники $A_1W_1B_1$ и CW_2D равны по двум катетам. Стороны построенного многогранника A_1B_1 и CD равны. Аналогично из равенства треугольников A_1W_1D и CW_2B_1 следует равенство отрезков A_1D и B_1C. Соответственно, A_1B_1CD – параллелограмм, центром пересечения диагоналей которого является точка O. Его диагонали равны как радиусы сферы Ω_1, рассматриваемый четырехугольник является параллелограммом. Следовательно, точки C и A_1 принадлежат плоскостям τ_1 и τ_2 соответственно. Длину отрезка A_1B_1 найдем по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника $A_1B_1W_1$, она равна $\frac{d}{\sqrt{3}}$. Тогда $CD = \frac{d}{\sqrt{3}}$, $A_1D = B_1C = \frac{\sqrt{2}d}{\sqrt{3}}$.

По построению точки B, C, A_1 лежат на окружности ω_1, следовательно, $BB_1 = B_1C_1 = A_1B_1 = \frac{d}{\sqrt{3}}$. Аналогично можно показать, что $CD = DD_1 = AD = \frac{d}{\sqrt{3}}$.

Точки B и C_1 лежат в плоскости σ_1, перпендикулярной прямой A_1B_1. Прямые B_1C_1 и BB_1 перпендикулярны A_1B_1. Соответственно, прямые DD_1 и DA перпендикулярны CD. Плоскости σ_1 и σ_2 перпендикулярны параллельным прямым, следовательно, сами являются параллельными.

Обозначим H точку пересечения B_1C и BC_1. По теореме о трех перпендикулярах данные прямые B_1C и BC_1 перпендикулярны. Тогда точка H является серединой отрезка BC_1. Прямые W_1H и W_2C образованы пересечением параллельных плоскостей с плоскостью τ. Соответственно, треугольники HB_1W_1 и CB_1W_2 подобны. Справедливо соотношение $\frac{B_1H}{B_1C} = \frac{B_1W_1}{B_1W_2} = \frac{\frac{1}{3}d}{\frac{2}{3}d} = \frac{1}{2}$. Таким образом, точка H делит B_1C пополам и $B_1H = \frac{\sqrt{2}d}{2\sqrt{3}}$. Вычислим BH из прямоугольного треугольника B_1BH, $BH = \frac{\sqrt{2}d}{2\sqrt{3}}$. Следовательно, диагонали четырехугольника BB_1C_1C равны, делятся точкой пересечения пополам и перпендикулярны. В таком случае BB_1C_1C – квадрат. Аналогичные рассуждения позволяют заключить, что AA_1D_1D также является квадратом. Стороны указанных квадратов равны. Соответственно равны треугольники B_1C_1C и A_1D_1D по трем сторонам, причем по доказанному ранее B_1C и A_1D параллельны.

Предположим, что прямые B_1C_1 и A_1D_1, лежащие в параллельных плоскостях, не являются параллельными. Проведем через точку A_1 в плоскости σ_1 прямую, параллельную B_1C_1. Углы, образованные парами параллельных прямых будут, равными. Из точки A_1 в одной плоскости от прямой A_1D_1 отложены две различные прямые, образующие с ней равные углы, что невозможно. Следовательно, прямые

B_1C_1 и A_1D_1 действительно параллельны. В таком случае, $A_1B_1C_1D_1$ является квадратом. Аналогично докажем, что A_1B_1BA, C_1CDD_1, $ABCD$ являются квадратами. Многогранник, составленный из шести квадратов, действительно является кубом.

Исследование. Выбор прямых f и g определяет положение куба в пространстве. Каждый шаг построения выполним и единственен.

Динамическое конструирование. С помощью программы GeoGebra построим динамическую модель [Построение…], которая позволяет наглядно продемонстрировать построение куба. Изменение длины отрезка XY позволяет продемонстрировать изменения, происходящие при построении куба.

Данную задачу можно было решить иначе. Для этого требуется построить отрезок длины $\frac{d}{\sqrt{3}}$, равный длине стороны куба. По заданной стороне куба выполнить построение несложно. Рассмотренный вариант основан на применении свойств куба. В таком случае решение сводится к определению вершин куба.

При обсуждении данной задачи со школьниками можно сравнить два указанных способа решения и обозначить различия между ними. Алгебраический способ решения проще, геометрический требует обязательного обоснования того факта, что построенный многогранник действительного является кубом. Более сложный вариант решения позволяет продемонстрировать особенности задач конструктивной геометрии в пространстве и реализации отдельных этапов.

Библиографический список

1. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – СПб.: Издательство «Санкт-Петербург оркестр», 1994. – 416 с.

2. Леонтьева Н. В. Методика обучения решению задач на построение в пространстве на основе расширенной схемы // Вестник Вятского государственного университета. – 2022. – № 4(146). – С. 121-132. – DOI 10.25730/VSU.7606.22.061.

3. Построение куба по диагонали. URL: https://www.geogebra.org/m/rbd7f8qy (дата обращения: 07.07.2025).

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 519.6

М.Д. Малых

От разностной схемы Эйлера к методу Кагана

В статье рассматриваются вопросы проектирования разностных схем, корректно описывающих поведение решения в подвижных полюсах. Сделана попытка понять, почему на долгие века утвердилось мнение о том, что это невозможно. Представлено решение этого вопроса для уравнения Риккати и обобщение этого приема на системы дифференциальных уравнений с квадратичной правой частью, известное как метод Кагана. С этой точки зрения рассмотрен спор Клейна и Эрмита о возможности построения теории эллиптических функций на основе преобразований Кремоны.

Ключевые слова: *обыкновенные дифференциальные уравнения, разностная схема, метод Кагана, бирациональное преобразование, подвижные особые точки.*

M.D. Malykh

From Euler difference scheme to Kahan method

The article discusses issues of designing differential circuits that correctly describe the behavior of the solution in mobile poles. An attempt has been made to understand why the opinion that this is impossible has been established for many centuries. A solution to this question for the Riccati equation and a generalization of this technique to systems of differential equations with a quadratic right-hand side, known as the Kahan method, are presented. From this point of view, Klein and Hermite's dispute about the possibility of building a theory of elliptic functions based on Cremona transformations is considered.

Key words: *ordinary differential equations, difference scheme, Kahan method, birational map, movable singular points.*

Метод конечных разностей для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений в учебной литературе был подробно описан Эйлером в первом томе «Интегрального исчисления», раздел

2, задача 85. На протяжении нескольких веков влияние Эйлера было столь значительно, что А.Н. Крылов в своих «Лекциях о приближенном исчислении», § 89, счел разумным подробно изложить представления Эйлера, представив свой перевод исходного латинского текста Эйлера.

С современной точки зрения, Эйлер аппроксимировал дифференциальное уравнение

$$dy = f(x, y)dx$$

разностной схемой

$$\hat{y} = y + f(x, y)\Delta x,$$

которую теперь называют схемой Эйлера, и предложил вычислять приближенное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, по рекурсии

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)\Delta x, \quad n = 0, 1, 2 \ldots,$$

интерпретируя y_n как приближенные значения y в точке $x_n = n\Delta x$. Появление на рассматриваемом отрезке подвижной особой точки оказывает фатальное действие на применимость этого метода, что было хорошо известно Эйлеру и описано в пп. 653-654:

«Ошибки, получающиеся при этом вычислении, проистекают из того, что на отдельных промежутках мы рассматриваем оба количества x и y как постоянные, и таким образом функция f принимается за постоянную. Значит, чем более меняется значение количества f при переходе от какого-либо промежутка к следующему, тем бóльших ошибок следует опасаться.»

И далее:

«С этим неудобством мы встречаемся в первую очередь там, где f либо исчезает, либо обращается в бесконечность».

В своих Лекциях А.Н. Крылов передает слова Эйлера так.

«Погрешность при этом вычислении происходит оттого, что на протяжении каждого отдельного промежутка обе переменные x и y принимаются сохраняющими свои значения, соответствующими началу этого промежутка, так что и значение функции $f(x, y)$ остается постоянным, поэтому: чем быстрее значение этой функции

меняется от одного промежутка к следующему, тем большую можно ожидать погрешность. Это невыгодное обстоятельство имеет место обыкновенно там, где значения $f(x, y)$ или уничтожаются, или же становятся бесконечно большими.»

Нельзя не заметить некоторую смену интонации, там, где Эйлер опасался больших ошибок, А.Н. Крылов их уже ожидал.

Многочисленные эксперименты полностью подтвердили эту мысль: возле подвижных особых точек вычисления по схеме Эйлера удаляются от точного решения все сильнее и сильнее до полной потери какого-либо сходства с ним. Причину этого явления описал Эйлер в процитированном выше фрагменте. Кажется, что эти соображения применимы к любой разностной схеме, поэтому это досадное неудобство никак не может быть устранено выбором разностной схемы.

Интересно отметить и то, что и Эйлер, и следующий за ним Крылов в качестве первого примера рассматривают уравнение Риккати – первое из тех, которое не удалось проинтегрировать в элементарных функциях. Однако для уравнения Риккати совсем нетрудно составить разностную схему, для которой указанное выше невыгодное обстоятельство совершенно не проявляется.

В самом деле, заменим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = p(x) + y^2$$

разностной схемой

$$\hat{y} = y + (p + y\hat{y})\Delta x.$$

Решив это уравнение относительно $\hat{y}$, мы выразим $\hat{y}$ как дробно-линейную функцию y. Поэтому вычисление приближенного решения по этой схеме не труднее, чем по схеме Эйлера. Мы сравнили график точного решения уравнения

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

и точки приближенного решения, найденного по этой схеме [1]. Оказалось, что приближенное решение вполне корректно

воспроизводит поведение точного решения уравнения Риккати в подвижном полюсе: оно уходит на $+\infty$ и возвращается обратно с $-\infty$. Разумеется, само положение особой точки на оси Ox определяется с некоторой погрешностью, а бесконечно больших значения заменяются на просто большие. Важно, что имеется большое положительное значение y, после которого следует большое по модулю отрицательное значение. Именно это мы видим на графике, когда говорим, что он верно передает характер полюса. Более того, корректно воспроизводится даже последовательность подвижных полюсов.

Причина, благодаря которой приближенное решение уравнения Риккати подражает поведению точного в подвижных полюсах, состоит в том, что переход со слоя на слой осуществляется при помощи бирационального преобразования. Хорошо известно, что уравнение Риккати среди ОДУ 1-го порядка – единственное уравнение, которое задает бирациональное соответствие между начальным и конечным значением y. Схема Эйлера ломает это бирациональность этого соответствия и поэтому описывает полюса неверно.

Прием, которым мы построили бирациональную разностную схему, легко переносится на системы дифференциальных уравнений с квадратичной правой частью. Этот прием известен в литературе по солитонной тематике еще с середины XX века, но как особый метод он был впервые описан У. Каганом в 1993 году на конференции в Онтарио и поэтому часто именуется методом Кагана [2]. При этом сам Каган заметил:

«I have used these unconventional methods for 24 years without quite understanding why they work so well as they do, when they work. That is why I pray that some reader of these notes will some day explain the methods' behavior to me better than I can, and perhaps improve them.»

(Я использовал эти нетрадиционные методы в течение 24 лет, не вполне понимая, почему они работают так хорошо. Вот почему я молюсь, чтобы некоторые читатели этих заметок когда-нибудь объяснить мне поведение методов лучше, чем я могу, и, возможно, улучшить их.)

По нашему мнению, причина в том, что вообще динамические системы должны задавать взаимно-однозадачное соответствие между начальным и конечным состояниям системы. Должны, но в нелинейном случае не задают. Мы исправляем эту несправедливость при переходе к конечным разностям. При этом мы возвращаемся к старым проблемам и старым ошибкам, на которые теперь можно посмотреть под новым углом зрения.

Так, например, дифференциальные уравнения, описывающие эллиптические функции Якоби, можно по методу Кагана аппроксимировать разностной схемой, которая задает бирациональное соответствие между слоями [3]. Это приводит нас к давней заочной дискуссии, случившейся между Клейном и Эрмитом. После публикации мемуаров Кремоны по бирациональным преобразованиям плоскости, Эрмит полагал, что теперь теория эллиптических функция встанет на фундамент теории преобразований Кремоны. Клейн в своих Лекциях по истории математики подробно разъяснял «ошибку» Эрмита: теорию эллиптических функций можно вывести из теории бирациональных преобразований кривых, но не всякое бирациональное преобразование кривой можно продолжить до бирационального преобразования плоскости. Однако открытие Кагана позволяет взглянуть на этот старый спор под новым углом: при помощи преобразований Кремоны можно построить дискретную теорию эллиптических функций, которая тем и отличается от непрерывной, что место бирациональных преобразований эллиптической кривой занимают преобразования Кремоны объемлющего ее пространства. Абрис такой теории предложен нами в [3].

Библиографический список

1. Айрян Э.А., Малых М.Д., Севастьянов Л.А. Метод конечных разностей и интегрирование дифференциальных уравнений в конечном виде. // Препринты ОИЯИ, Дубна, 2018. № Р11-2018-17.

2. Sanz-Serna J.M. // Applied Numerical Mathematics. 1994. V. 16 P. 245-250.

3. Айрян Э.А., Гамбарян М.М., Малых М.Д., Севастьянов Л.А. Обратимые разностные схемы для эллиптических осцилляторов // Записки научных семинаров ПОМИ. 2023. Т. 528. С. 54-78.

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 517.98

К.Ю. Малышев

О вкладе Л.В. Канторовича в теорию суммирования в конечном виде расходящихся рядов Фурье

Работа посвящена истории получения конечных формул для расходящихся тригонометрических рядов. Расходящиеся тригонометрические ряды могут рассматриваться не только с классических позиций, но и с точки зрения функционального анализа. Формирование функционального анализа как раздела математики в 1930-е годы не было завершено. Мы рассказываем о двух статьях Л.В. Канторовича, опубликованных в 1935 году, затрагивающих расходящиеся ряды Фурье.

Ключевые слова: *расходящийся ряд, теория обобщённых функций, функциональное пространство, Л.В. Канторович, функциональный анализ, история математики.*

K.Yu. Malyshev

On the contribution of L.V. Kantorovich to the theory of summation in finite form of divergent Fourier series

The work is devoted to the history of obtaining finite formulas for divergent trigonometric series. Divergent trigonometric series can be considered not only from classical positions, but also from the point of view of functional analysis. The formation of functional analysis as a section of mathematics in the 1930s was not completed. We tell about two articles by L.V. Kantorovich, published in 1935, touching upon divergent Fourier series.

Key words: *divergent series, distribution theory, functional space, L.V. Kantorovich, functional analysis, history of mathematics.*

Расходящиеся тригонометрические ряды одним из первых суммировал в конечном виде Эйлер (Leonard Euler, 1707-1783). Например, им было дано выражение для суммы ряда, много

позже названного «разложением в ряд Фурье δ-функции Дирака». В вычислении Эйлера получен тождественный нуль [Эйлер, 1949, Ч. 2, Гл. IV, п. 92, стр. 271]. Подобные ряды суммировались в работах многих математиков, укажем работу Д. Бернулли (Daniel Bernoulli, 1700–1782) «О суммированиях парадоксально-правильных рядов, о их толковании и применении» 1772 года. Использование символической «δ-функции», заданной расходящимся тригонометрическим рядом, есть у Фурье (Jean-Baptiste Joseph Fourier, 1768-1830) в книге «Аналитическая теория тепла», 1822 [Fourier, 1878, Ch. III, no. 235, p. 208]. Точную дату введения Фурье соответствующего построения указать затруднительно. История опубликования труда Фурье представлена в работе [Чашечкин, 2008]. Известно (см. [Соболев, 1988, с. 307]), что применение Фурье расходящегося ряда было раскритиковано Дарбу (Jean Gaston Darboux, 1842-1917). Тем не менее, к концу XIX века инструментарий расходящихся рядов был доведён до совершенства [Харди, 1951]. Отметим работу 1916 года И.И. Привалова (1896-1941) о суммировании по Чезаро (Ernesto Cesàro, 1859-1906) первой производной от ряда Фурье функции, интегрируемой по Лебегу (Henri Léon Lebesgue; 1875-1941) [Приваловъ, 1916].

А.Н. Крылов (1863-1945) в докладе «Леонард Эйлер», говорил о «бесполезности» «формул» для расходящихся рядов для приложений [Крылов, 1933, с. 22]. Без сомнения, академику Крылову были известны результаты, собранные в монографии Харди (Godfrey Harold Hardy, 1877-1947). Тем не менее, высказывание его было вполне определённым. Вероятно, проблема здесь именно в разночтении между δ-функцией и нулевым значением суммы тригонометрического ряда, даваемым многими классическими методами суммирования. Анализ этого вопроса, позволяющий «увидеть» вместо тождественного нуля δ-функцию, представлен в [Харди, 1951, Гл. IV, п. 4.17, стр. 116], но, очевидно, это не считалось вполне удовлетворительным.

Понятие δ-функции и её производных к 1935 году не было вполне признанным. Вспомним замечания фон Неймана (John von Neumann,1903-1957) о «"несобственных" конструкциях» Дирака (Paul Adrien Maurice Dirac, 1902-1984), точные цитаты и их анализ см. в работе [Кутателадзе, 2017, с. A59-A60]. Бесспорной теории

объектов наподобие δ-функции ещё не существовало. При этом классическая теория расходящихся рядов если и могла быть такой теорией (можно сравнить принятое сейчас определение производной от δ-функции и выкладки в книге Харди, Гл. II, п. 2.10, стр. 52-54), то с очевидными трудностями.

В 1935 году в томе 3, номере 7 ДАН СССР вышла статья С.Л. Соболева (1908–1989) «О задаче Коши в пространстве функционалов». В этой работе впервые дано определение обобщённых функций как линейных непрерывных функционалов на некотором пространстве основных функций. Почти одновременно [Кутателадзе, 2008, с. 978] в ДАН СССР вышли статьи Л.В. Канторовича (6(19).01.1912-7.04.1986) «О некоторых общих методах расширения пространств Гильберта» [Канторович-1, 1935] и «Некоторые частные методы расширения пространств Гильберта» [Канторович-2, 1935]. В этих работах ставится и решается задача «обогащения» [Канторович-1, 1935, с. 116] гильбертова пространства так, чтобы присоединить к нему элементы, родственные δ-функции. Новые элементы называются «идеальными».

Опишем схему Канторовича расширения пространства Гильберта H. Пусть в H задано плотное линейное подмножество D. Пусть задано семейство $\{B\}$ симметричных положительно-определённых линейных операторов с областью определения D. Область значений каждого оператора является подмножеством в D. Требуется, чтобы вместе с $b \in \{B\}$ выполнялось также $b^{-1} \in \{B\}$. Требуется, чтобы единичный оператор принадлежал $\{B\}$. Каждый оператор $b \in \{B\}$ задаёт энергетическую норму на D. Требуется, чтобы для любых двух операторов $b_1 \in \{B\}$ и $b_2 \in \{B\}$ можно было указать оператор $b_3 \in \{B\}$, порождающий энергетическую норму, более «слабую» по отношению к энергетическим нормам, порождённым операторами $b_1 \in \{B\}$ и $b_2 \in \{B\}$. Множество D необходимо пополнить по энергетической норме оператора b, получив пополнение

D_b . Все гильбертовы пространства D_b следует объединить. Объединение всех D_b и есть пространство $\Im$, являющееся «обогащением» H . Далее определяется отношение равенства между элементами пространства $\Im$, даётся ряд теорем о линейных операторах в $\Im$.

Рассмотрим пример расширения, связанный с тригонометрическими рядами [Канторович-2, 1935, с. 166]. Пусть $H = L_2(-\pi,\pi)$, D – гладкие функции, удовлетворяющие условиям периодичности и условию ортогональности константе, $\{B\}$ – семейство операторов, состоящих из операторов дифференцирования чётного порядка и их обратных операторов на D. Пространство H можно рассматривать как множество сходящихся в $L_2(-\pi,\pi)$ тригонометрических рядов Фурье. Пространство $\Im$ можно описать как множество тригонометрических рядов, коэффициенты которых возрастают не быстрее некоторой степени номера базисного элемента. Так открывается возможность суммирования расходящихся тригонометрических рядов в виде «идеальных функций». «Идеальные функции» получаются дифференцированием элементов пространства H , понимаемым как формальное дифференцирование рядов Фурье. Пример из статьи [Канторович-2, 1935, с. 167]:

$$\sigma^{(v)}(t) \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2i}\frac{1}{k}\left[(ik)^v e^{ikt} - (-ik)^v e^{-ikt}\right] \in \Im.$$

Данные элементы получены дифференцированием ряда

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2i}\frac{1}{k}\left[e^{ikt} - e^{-ikt}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k} = \frac{\pi}{2} sign(t) - \frac{t}{2} \in L_2(-\pi,\pi).$$

Л.В. Канторович анонсировал третью заметку, посвящённую приложениям его конструкции. Однако эта работа не была дописана. В последние месяцы жизни Л.В. утверждал: «до настоящего времени я не знаю, насколько этот путь был реален и плодотворен» [Канторович, 1987, стр. 196]. Приведём высказывание И.М. Гельфанда (1913-2009): «по существу, Леонид Витальевич первым понял значение обобщенных функций и написал об этом

задолго до Лорана Шварца. <…> Я думаю, что сделанная намного позже работа А.Г. Костюченко (1931-2010) и моя об использовании обобщенных функций для спектрального анализа операторов была именно той, которую Леонид Витальевич не написал в свое время. По существу, же он четко и ясно понимал эту работу, какие теоремы можно получить» [Гельфанд, 2002, с. 162]. Вероятно, И.М. упоминает статью «О разложении дифференциальных и других операторов по собственным функциям» [Гельфанд, Костюченко, 1955].

Автор благодарит М.В. Алексеева, А.В. Бадьина, Е.Д. Волчкову, М.Д. Малых, Л.А. Севастьянова, А.В. Селиверстова, Ю.Д. Чашечкина за ценные обсуждения. Тексты работ Л.В. Канторовича были предоставлены ГПНТБ России.

Библиографический список

1. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. / Л. Эйлер. Пер. с лат. М.Я. Выгодского. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. 580 с. (Перевод: Euler L. Institutiones calculi differentialis. Akademija nauk San Pietroburgo, 1755.) https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Ejler-1949ru.pdf

2. Bernoulli D. De summationibus serierum quarundam incongrue veris earumque interpretatione atque usu / D. Bernulli // Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitana. 1771. V. 16. P. 71-90. http://heritage.jscc.ru/Book/10085041

3. Fourier J. The analytical theory of heat. Cambridge [Eng.]: University Press, 1878. 467 p. https://archive.org/details/analyticaltheory00fourrich/page/n5/mode/2up

4. Чашечкин Ю.Д. Жан Баптист-Жозеф Фурье (1768-1830) – учёный, педагог, администратор / Ю.Д. Чашечкин // Советский физик. 2008. № 2(62). https://phys.msu.ru/rus/about/sovphys/ISSUES-2008/2(62)-2008/62-12/

5. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 336 с. http://lib.ysu.am/disciplines_bk/2b3ad4ec8ef5987c48687b0ba45f0c-76.pdf

6. Харди Г.Г. Расходящиеся ряды. М.: Издательство иностранной литературы. 1951. 504 с. https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Hardi1951ru.pdf

7. Приваловъ И.И. О диференцированіи рядовъ Fourier / И.И. Приваловъ // Матем. сб. 1916. Т. 30. № 2. С. 320-324. https://www.mathnet.ru/rus/sm6559

8. Крылов А.Н. Леонард Эйлер: доклад акад. А.Н. Крылова, прочит. на торжеств. засед. Акад. наук СССР 5 окт. 1933 г. Л.: изд. АН СССР, 1933. https://math.ru/lib/files/djvu/istoria/krylov-euler.pdf

9. Кутателадзе С.С. Банах, Соболев и бурные годы / С.С. Кутателадзе // Сибирские электронные математические известия. 2017. Т. 14. С. 1602-1609. DOI 10.17377/semi.2017.14.047

10. Кутателадзе С.С. Соболев из школы Эйлера / С.С. Кутателадзе // Сибирский математический журнал. 2008. Т. 49. № 5. С. 975-985. https://elibrary.ru/item.asp?id=11394114

11. Канторович Л.В. О некоторых общих методах расширения пространств Гильберта / Л.В. Канторович // ДАН. 1935. Т. 4. № 3. С. 115-118. https://www.elibrary.ru/zjgpln

12. Канторович Л.В. Некоторые частные методы расширения пространств Гильберта / Л.В. Канторович // ДАН. 1935. Т. 4. № 4-5. С. 163–167. https://www.elibrary.ru/zjgqfx

13. Канторович Л.В. Мой путь в науке (предполагавшийся доклад в Московском математическом обществе) / Л.В. Канторович // Успехи математических наук. 1987. Т. 42, № 2(254). С. 183–213. DOI 10.1016/j.jat.2007.03.006.

14. Гельфанд И.М. Леонид Канторович и синтез двух культур // Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый. Новосибирск: Гео, 2002. Т.1. С.162-163. http://vivovoco.astronet.ru/VV/PAPERS/BIO/LVK/LVK09.HTM

15. Гельфанд И.М., Костюченко А.Г. О разложении дифференциальных и других операторов по собственным функциям / И.М. Гельфанд, А.Г. Костюченко // ДАН. 1955. Т. 103. № 3. https://elibrary.ru/cit_items.asp?publid=384496917

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 372.851

Э.А. Медер, Ю.С. Налбандян

Математика и актуальные тренды формирования архитектурной среды: возможности междисциплинарного взаимодействия

Рассматриваются особенности преподавания математики и дисциплин, связанных с пластическими искусствами, которые позволяют на разных уровнях образования обеспечить подготовку грамотных, эстетически развитых специалистов с государственной гражданской позицией, ориентирующихся в разнообразной, не всегда качественной информации, понимающих принципы формирования гармоничной среды бытия человека.

Ключевые слова: *образование, математика, пластические искусства, анализ информации.*

E.A. Meder, Yu.S. Nalbandyan

Mathematics and current trends in the formation of the architectural environment: Possibilities of interdisciplinary interaction

The article examines the features of teaching mathematics and disciplines related to the plastic arts, which allow at different levels of education to ensure the training of literate, aesthetically developed specialists with a state civic position, who are oriented in diverse, not always high-quality information, and who understand the principles of forming a harmonious environment for human existence.

Keywords: *education, mathematics, plastic arts, information analysis.*

XXI век предъявил образовательному сообществу ряд весьма серьезных дилемм уровня цивилизационного выбора. С одной стороны, тенденции к глобализации, культурной и религиозной интеграции и унификации, с другой – буквально на уровне про-

блем выживания национальных культур –настоятельная необходимость сохранения культурного суверенитета и, следовательно, потребность в качественном анализе характерных особенностей национального культурного кода. С одной стороны, нарастающее дробление областей знаний и научных направлений, с другой – междисциплинарность и мультидисциплинарность, необходимость грамотного и профессионального сотрудничества специалистов, ведущих исследования в не всегда смежных направлениях. С одной стороны, необходимость обеспечить на всех уровнях образования получение прочных и устойчивых знаний и призывы заниматься исключительно «обучением», с другой – не менее острая необходимость формирования в процессе обучения государственной гражданской позиции и, соответственно, внимание к воспитательной работе.

Интересные материалы, связанные с культурным суверенитетом, можно найти в сборнике [Проблемы культурологического мифа …, 2021] (там есть и статьи авторов данной публикации), поэтому здесь целесообразно обсудить вторую и третью ситуации, тем более что преподавание и математики, и дисциплин, связанных с пластическими искусствами, предоставляет весьма широкие возможности для решения возникающих проблем.

Понятия междисциплинарности и мультидисциплинарности становятся сейчас популярными, в них вкладываются самые разнообразные смыслы, но не вызывает сомнения факт, что математика и искусство – именно как феномены творческой деятельности – не только сформировались в древности практически одновременно, но и поныне выступают в качестве взаимодополняющих друг друга способов/методов познания. Один из авторов данной статьи размышлял об этом в публикации [Медер, 2014], в основном, в связи с особенностями работы со студентами художественных специальностей, а в статье [Налбандян, 2022] и в цикле докладов на различных конференциях была предпринята попытка проанализировать особенности изучения математических дисциплин на протяжении всей истории художественного образования в России (XVII-XXI вв.). Сейчас целесообразно обратить внимание на другой аспект, а именно – какую роль могут играть учеб-

ные курсы, связанные с искусствознанием, в подготовке специалистов широкого профиля. В 2023 году ЮФУ начал реализацию «ядерной программы», целью которой стало формирование единого для всех подразделений университета набора дисциплин, способствующих развитию общего уровня выпускника, обеспечивающих его подготовку как «субъекта деятельности, способного отвечать на «большие вызовы» сложного мира». И если на первом этапе в «ядро» были включены такие направления как «иностранные языки», «принципы естественнонаучного познания» (включающие в себя математику), «философия и технология мышления», «Россия и мир», «аналитическое чтение», «безопасность жизнедеятельности и физическая культура», то в результате весьма бурных обсуждений к ним добавился курс «Воображение, изображение, реальность». Целью его было заявлено «эстетическое воспитание и духовное развитие личности, формирование художественного мышления и творческого подхода к решению профессиональных задач». В данный момент трудно судить и о реальном содержании, и о результатах – дисциплина реализуется первый год. Однако обращают на себя внимание следующие моменты. Во-первых, явно прослеживающаяся связь с точными науками, в том числе раздел, связанный с формообразованием в дизайне. Во-вторых, возможности формирования критериев, помогающих студенту художественно-проектных специальностей ориентироваться в законах создания гармоничной среды бытия человека.

К сожалению, в последнее время усиливается некоторая опасность дезориентации в связи с тем обстоятельством, что информационное пространство сегодня заполнено огромным количеством публикаций, не вполне, мягко говоря, соответствующего качества (см. подробности в [Налбандян, 2021]). В результате возникает порочный замкнутый круг: для того, чтобы отличить достоверную и качественную информацию от малограмотной самодеятельности, нужно некоторое знакомство с предметом, а приобрести хотя бы начальные базовые представления без качественного фильтра невозможно. И здесь решающую роль должен играть в первую очередь университет, прививая студенту навыки т.н. «информационной гигиены». Причем не эпизодически и в частных

случаях, а системно, на уровне буквально доктрины. Прежде всего вырабатывая у студента привычку консультироваться с преподавателем по вопросу выбора тех или иных источников.

Вопрос же выбора источников качественной и достоверной информации становится тем более актуальным в связи с тем, что, как бы парадоксально это ни звучало, но в студенческой (и в целом молодежной) среде в последнее время наметился вполне отчетливый интерес к самым разным областям знания, в том числе – и естественнонаучным. Да, как ни странно, но и студенты творческих специальностей, включая специальности, связанные со средовым (и прежде всего архитектурным) проектированием, обращают внимание на естественнонаучную проблематику. К сожалению, как выше отмечено, информация, пользующаяся устойчивым вниманием и интересом, в соответствии с «законом спроса и предложения» (в соответствующей интерпретации, но тем не менее) начинает предлагаться на «всех прилавках» Интернета, и в большинстве своем это предложение представляет собой малограмотные перепевы плохо понятой «активными авторами» даже качественной научно-популярной литературы. А, как известно, полузнание (тем более его профанация) – гораздо хуже и даже опаснее полного незнания. Уже потому, что полузнание создает иллюзию знания и становится фундаментом формирования мировоззрения, исправление которого становится куда более сложной задачей, нежели последовательное формирование изначально правильного. Один из авторов данного текста, размышляя о ключевой же роли общекультурных знаний в формировании мышления архитектора и дизайнера, подчеркивал, что «без достаточно четко структурированных познаний в области истории (всей культуры, истории искусств в целом, архитектуры и дизайна в частности, истории науки и техники, точнее, всех этих дисциплин, увязанных в единое знание) невозможен сам процесс проектирования, в том числе и учебного» (см. [Медер, 2021, с. 125]).

Обратимся теперь к вопросу о соотношении учебного и воспитательного компонентов при реализации различных учебных программ. Тема эта не нова, принципиальные вопросы рассматривались ещё Л.Д. Кудрявцевым, членом-корреспондентом АН

СССР, благодаря которому в немалой степени сложилась современная система математического образования МФТИ. Из последних публикаций представляет интерес монография [Современное математическое образование …, 2022], в которой, помимо прочего, приведена обширная библиография (более 140 наименований). Важно подчеркнуть, что «чистое» обучение в современных политических реалиях становится невозможным. А математика – и как наука, и как учебный предмет – предоставляет самые широкие возможности для решения различных воспитательных задач, например, таких как развитие логики мышления, позволяющей понимать причинно-следственные связи и не попадаться на крючок ложных дихотомий; развитие интеллекта и становление характера обучающихся (как школьников, так и студентов); укрепление государственного мышления (осознание неразделимости государственной поддержки науки и образования и поддержки, которую научные и учебные заведения – и их выпускники – оказывают государству); эстетическое воспитание, развитие чувства прекрасного.

Собственно говоря, перечисленные аспекты позволяют связать в единое целое всё, о чем речь шла раньше, включая междисциплинарность и формирование художественного мышления. Их можно проиллюстрировать разнообразными примерами, что и предполагается сделать в докладе.

Библиографический список

1. Медер Э.А. Постиндустриальная парадигма информационного общества: возможности диалога и взаимопонимания / Э.А. Медер, А.В. Жуков //Формирование предметно-пространственной среды современного города: материалы ежегодной Всеросс. научно-практ. конференции с межд. участием, 16-17 октября 2014 г. Магнитогорск: Изд-во МГТУ, 2014. С. 33-38.

2. Медер Э. А. Современное художественно-проектное образование и проблемы междисциплинарных связей // Искусствознание и педагогика: диалектика взаимосвязи и взаимодействия. Сборник трудов XIV Межд. межвузовской научно-практ. конференции / Санкт-Петербург, 2021. С. 114-126.

3. Налбандян, Ю.С. Роль математики в формировании эстетических парадигм архитектуры и искусства / Ю.С. Налбандян, Э.А. Медер // Математический талант и математическое образование: Материалы III Всеросс. научно-практ. конференции, Майкоп, 09-12 декабря 2020 года. – Майкоп: Изд-во АГУ, 2021. – С. 70-76.

4. Налбандян Ю.С. Роль научного знания в формировании парадигмы художественно-проектного образования // Социокультурные аспекты новой индустриализации и их отражение в современном искусстве: Сборник материалов Всеросс. конференции, состоявшейся в рамках мероприятий IV Всеросс. триеннале современного изобразительного искусства «Лабиринт», Магнитогорск, 24-25 июня 2022 г. – Магнитогорск: Рег. отделение Общеросс. общественно-государственной организации «Российский фонд культуры» Челябинской области: Магнитогорский Дом печати, 2022. С. 89-97.

5. Проблемы культурологического мифа в условиях современных цивилизационных вызовов и культурный суверенитет России: сборник материалов Всеросс. научно-практ. конференции, 15-18 ноября 2021 г. Магнитогорск: Изд-во МГТУ им. Г.А. Носова, 2021. 188 с.

6. Современное математическое образование в контексте духовно-нравственной культуры / С.Н. Дворяткина, О.А. Саввина, Ю.В. Саввина, Н.В. Черноусова. Елец: ЕГУ имени И.А. Бунина, 2022. 167 с.

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 51(091)

Ю.С. Налбандян, Г.М. Полотовский

История математики на Колмогоровских чтениях (Ярославль, 2003 – 2015, Коряжма, 2017)

Рассматривается деятельность секции, посвященной истории и философии математики и математического образования, регулярно работавшей на ярославских Колмогоровских чтениях. Анализируются традиции, заложенные участниками первых конференций, тематика выступлений. Уделяется внимание деятельности Р.З. Гушель, благодаря усилиям которой Колмогоровские чтения стали значимым явлением в жизни российского историко-научного сообщества.

Ключевые слова: *история и философия математики и математического образования, А.Н. Колмогоров, Р.З. Гушель.*

Yu.S. Nalbandyan, G.M. Polotovsky

History of Mathematics at the Kolmogorov Readings (Yaroslavl, 2003 – 2015, Koryazhma, 2017)

The article examines the activities of the section devoted to the history and philosophy of mathematics and mathematical education, which regularly worked at the Yaroslavl Kolmogorov Readings. The traditions established by the participants of the first conferences and the topics of the speeches are analyzed. Attention is paid to the work of R.Z. Gushel, whose efforts made the Kolmogorov Readings a significant phenomenon in the life of the Russian history-scientific community.

Keywords: *history and philosophy of mathematics and mathematical education, A.N. Kolmogorov, R.Z. Gushel.*

Ярославский государственный педагогический университет (ЯГПУ) имени К.Д. Ушинского относится к числу ВУЗов, которые регулярно выступают организаторами научных конференций

высокого уровня. Так, в 1999 г. ЯГПУ, ИИЕТ имени С.И. Вавилова РАН и Институт государственного управления и социальных исследований МГУ имени М.В. Ломоносова возродили традицию проведения Всесоюзных школ по истории математики: после девятилетнего перерыва на базе ЯГПУ прошла V Всероссийская школа «История математики и математического образования как предмет исследования и преподавания» (подробнее об этом см. [Володарский, 2000]). В 2000-2003 гг. ЯГПУ стал организатором Всероссийских школ-семинаров «Профессионализация предметной подготовки учителя математики в педагогическом вузе». Четвёртая из них (апрель 2003 г.) проходила в год 100-летия со дня рождения Андрея Николаевича Колмогорова, детство которого прошло в селе Туношна (18 км от Ярославля), и пленарное заседание было посвящено выдающемуся учёному: с приветственным словом выступил ректор МГУ В.А. Садовничий, прозвучали доклады московских и ярославских исследователей, посвящённые ключевым событиям биографии Колмогорова, его научным результатам и педагогическим взглядам, а в выступлении ректора ЯГПУ В.В. Афанасьева впервые прозвучало словосочетание «Колмогоровские чтения» (интересные детали можно найти в [Бычков, 2003], только надо учитывать, что в этой статье В.В. Афанасьев упоминается с ошибочным вторым инициалом).

Итак, IV педагогическая школа-семинар была фактически официально переименована в I Колмогоровские чтения. В последующие годы на Ярославской земле они проводились еще 12 раз, традиционно во второй половине мая. Первые две конференции прошли в пансионате «Ярославль», затем в 2005 г. – на базе отдыха «Лесное», а с 2006 г. – параллельно в Ярославле и на базе отдыха ЯГПУ «Лютово». Потом обстоятельства изменились, была вынуждена уйти на пенсию идейный вдохновитель чтений Р.З. Гушель [Ревекка Залмановна Гушель, 2017], и в 2016 г. «было принято решение расширить географию проведения конференции – чередовать её проведение по городам и университетам в память о великом математике и его соратниках. При этом организаторы посчитали целесообразным перейти в дальнейшем на формат проведения чтений “один раз в два года”» [Афанасьев, 2023, с.8], и

XIV Колмогоровские чтения, посвященные 100-летию со дня рождения З.А. Скопеца, прошли в Коряжме в сентябре 2017 г.

Секция «История и философия математики и математического образования» (до 2011 г. – «История математики и математического образования») работала на всех четырнадцати конференциях 2003-2017 гг. При этом доклады историко-математической тематики звучали и на пленарных заседаниях (все они были посвящены деятельности А.Н. Колмогорова), и на специальных заседаниях или круглых столах (2006 г. – совместное заседание секций, посвященное памяти Н.И. Лобачевского, 2007 г. – совместное заседание, посвя-щенное Л. Эйлеру, 2008 г. – заседание, посвященное 100-летию со дня рождения А.И. Маркушевича и заседание, посвященное памяти Б.А. Розенфельда, 2009 г. – круглый стол, посвященный памяти И.Н. Веселовского, 2013 г. – круглый стол «Российская математика в XX веке», 2015 г. – круглый стол «А.Н. Колмогоров и Великая Победа»). Интересные обзоры пленарных докладов первых трех конференций можно найти в статьях [Бычков, 2003] и [Бычков, 2006].

Всего на рассматриваемой секции свои сообщения представили около 200 человек (считая соавторов), причем только четверть из них участвовала в Колмогоровских чтениях лишь один раз. География участников чтений была очень широкой: Португалия, Таджикистан, Украина, Абакан, Великие Луки, Вологда, Елабуга, Елец, Казань, Калуга, Ковров, Москва, Мурманск, Нижний Новгород, Новосибирск, Омск, Оренбург, Пермь, Псков, Ростов-на-Дону, Рязань, Санкт-Петербург, Саратов, Смоленск, Ставрополь, Сыктывкар, Тверь, Тюмень. Конечно, неоднократно выступали и ярославские учёные.

Среди докладчиков были студенты и аспиранты, некоторые из них становились постоянными участниками чтений, вырастая в признанных специалистов (например, В.В. Богун, В.М. Бусев). Были ситуации, когда доклады делались и на историко-математической, и на математической или педагогической секциях. С пленарными докладами выступали такие известные учёные, как ученик Колмогорова профессор МГУ Владимир Михайлович Тихомиров, ученик Колмогорова и Тихомирова, член-корреспондент

РАО Александр Михайлович Абрамов (1946-2015), один из ведущих советских и российских историков науки профессор Сергей Сергеевич Демидов, доктор философских наук Сергей Николаевич Бычков, профессор СУНЦ МГУ, заслуженный учитель России Валерий Васильевич Вавилов (1946-2016). Среди тех, кто регулярно участвовал в чтениях, упомянем Олега Олеговича Барабанова (1953-2024) из Коврова, Юрия Александровича Дробышева (1955-2024) из Калуги, москвичей Галину Ивановну Зверкину (1960-2024), Василия Яковлевича Перминова (1938-2024), Мариам Михайловну Рожанскую (1928-2014), Рэма Александровича Симонова (1929-2023), петербуржцев Владимира Петровича Одинца и Галину Ивановну Синкевич, Григория Михайловича Полотовского (Нижний Новгород), Андрея Ивановича Щетникова (Новосибирск). Пермскую школу истории математики регулярно представляли Алла Ефимовна Малых (1939-2019) и её ученики, ростовскую – Татьяна Сергеевна Полякова, Вячеслав Евгеньевич Пырков, Маргарита Бабкеновна Налбандян (1931-2004) и Юлия Сергеевна Налбандян. В работе первых Колмогоровских чтений активное участие принимала академик Академии наук Узбекистана Галина Павловна Матвиевская (1930-2025), на последующих конференциях постоянно выступали её ученики и соавторы из Оренбурга Инесса Васильевна Игнатушина, Инна Каримовна Зубова и другие.

Тематика докладов была очень широкой. Так, благодаря М.М. Рожанской большое внимание уделялось математике и механике средневекового Востока; Г.П. Матвиевская после переезда из Ташкента в Оренбург продолжала вместе с учениками заниматься изучением записных книжек Л. Эйлера и при этом начала работу по изучению истории математического образования в Оренбурге; ростовские учёные традиционно представляли сообщения, посвященные переезду Варшавского университета в Ростов и развитию ростовской математической школы; Р.З. Гушель неоднократно выступала с докладами по истории отечественного математического образования; В.М. Бусев, И.Э. Рикун увлеченно рассказывали об особенностях биографической и библиографи-

ческой работы; традиционно большой интерес вызывали сообщения доктора исторических наук Р.А. Симонова и его коллег о Кирике Новгородце и математике средневековой Руси.

Обсуждались проблемы философии математики и математического образования – например, в докладах С.Н. Бычкова «Производная как предел отношения приращений: «трансцендентализм» XIX века versus «физикализм» XVIII столетия» (2006 г.), «Геометрия, политология и аксиоматический метод» (2009 г.), Е.А. Зайцева «Математика древности и проблемы преподавания», В.Я. Перминова «Современные тенденции в философии математики».

Пленарные доклады С.С. Демидова, посвященные российской и советской математическим школам, дополнялись секционными сообщениями о жизни и деятельности Д.А. Граве, Д.А. Гудкова, А.Н. Крылова, Н.И. Лобачевского, А.Ф. Малинина, Б.К. Млодзеевского, Т.Ф. Осиповского, С.А. Рачинского, З.А. Скопеца и многих других. Среди сообщений, посвященных истории европейской математики, упомянем выступления португальца Хельмута Малонека и работающих в Португалии В.И. Харламовой и А.А. Харламова о развитии математики в Португалии, серию докладов Г.И. Синкевич о развитии математического анализа. Не раз и не два темой выступлений были судьбы и труды историков математики, ушедших из жизни.

В заключение отметим удивительно теплую и дружескую атмосферу, царившую в Лютово, собственную увлечённость докладчиков и их интерес к исследованиям коллег. На Колмогоровские чтения приезжали не только обсудить научные результаты, но и встретиться с единомышленниками и друзьями. Хочется, чтобы эта традиция не прервалась.

Библиографический список

1. Афанасьев В.В. История Колмогоровских чтений / В.В. Афанасьев, С.А. Тихомиров // Наставничество в математике и в математическом образовании: Материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 120-летию со дня рождения академика А.Н. Колмогорова, Киров, 14-15 сентября 2023 г. Киров: Вятский государственный университет, 2023. С. 5-9.

2. Бычков С.Н. Колмогоровские чтения / С.Н. Бычков, Р. З. Гушель // Вопросы истории естествознания и техники, 2003, Т.24, № 4. С. 149-151.

3. Бычков С.Н. Колмогоровские чтения в Ярославле и вопросы математического образования / С.Н. Бычков, Р.З. Гушель // Вопросы истории естествознания и техники, 2006, Т.27, № 3. С. 178-180.

4. Володарский А.И. V Всероссийская школа по истории математики / А.И. Володарский, Р.З. Гушель // Вопросы истории естествознания и техники, 2000, № 1. С.213-214.

5. Ревекка Залмановна Гушель (17.05.1950-11.02.2017) / В.В. Афанасьев, С.Н. Бычков, Е.В. Губина [и др.] // Математика в высшем образовании, 2017, № 15. С. 45-52

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 51(091+092)

В.П. Одинец

О математиках, не доживших до дня Победы

В статье рассказывается о двух математиках из числа тех, кто не дожил до дня Победы. О самих работах этих и других математиков, не доживших до дня Победы, см. книгу автора «О работах математиков, не доживших до дня Победы 9 мая 1945 года» – СПб.: «Коста», 2025. – 96 с. Все даты до марта 1918 года, относящиеся к математикам из России, даны по старому стилю.

Ключевые слова: *математики, не дожившие до дня Победы.*

W.P. Odyniec

About mathematicians who did not live to see Victory Day

The article tells about two mathematicians from among those who did not live to see Victory Day. For the works of these and other mathematicians who did not live to see Victory Day, see the authors book «On the works of mathematicians who did not live to see Victory Day on May 9, 1945» – St. Petersburg: "Costa", 2025. – 96 p. All dates before March 1918 related to mathematicians from Russia are given in the old style.

Key words: *mathematicians who did not live to see Victory Day.*



1. Гельфанд Арон Вульфович родился в посёлке Концевичи Мозырского уезда Минской губернии (ныне Петриковский район Гомельской области) в 1903 г. Отец – Гельфанд Юдель-Вульф (1874 г.р.), мать – Гельфанд (девичья фамилия Эдель) Рашель (Рахиль) Григорьевна. Известно, что А.В. Гельфанд окончил физико-математическое отделение педагогического факультета Белорусского государственного

университета (БГУ) в 1927 г. и продолжил учебу в аспирантуре БГУ. С 1929 г. его научным руководителем стал профессор БГУ Целестин Леонидович Бурстин (1888-1938), всемирно известный как геометр и алгебраист, эмигрировавший в СССР в 1929 г. и избранный в 1931 г. академиком Белорусской Академии Наук.

В июне 1930 г. А.В. Гельфанд участвует в работе Первого Всесоюзного математического съезда в Харькове [1], однако сам на нём ещё не выступает. Вернувшись в Минск, он становится преподавателем педагогического факультета, а с 1933 г. работает уже на физико-математическом факультете БГУ, образованном в конце 1932 г. из физико-математического отделения педагогического факультета.

В июне 1934 г. А.В. Гельфанд участвует в работе Второго Всесоюзного математического съезда в Ленинграде, где на заседании секции «Приближённые вычисления» выступает с докладом «Приближённое интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка» [2]. (На том же съезде Ц.Л. Бурстин, кроме доклада на секции геометрии, делает доклад на секции «Дифференциальные и интегральные уравнения» на тему «Новый метод интегрирования Pfaff'овых агрегатов»).

Основная часть доклада А.В. Гельфанда была посвящена обобщению результатов Чаплыгина–Лузина – теореме, названной автором «обобщённой теоремой Чаплыгина». При этом при построениях пар аппроксимирующих кривых вместо построения Лузина используется теорема Бурстина. Это позволяет улучшить оценку сходимости к искомой интегральной кривой.

В 1935 г. А.В. Гельфанд защитил в БГУ кандидатскую диссертацию и был назначен деканом физико-математического факультета, а в 1936 г. ему было присвоено звание доцента.

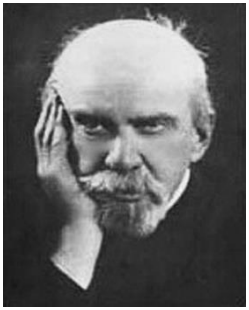
«Ежовщина» к 1937 г. достигла пика. В декабре 1937 г. был арестован Ц.Л. Бурстин, в октябре 1938 г. он скончался в тюремной больнице в Минске.

Начатая в 1937 г. реформа БГУ продолжилась, и в 1938 г. на физико-математическом факультете создаётся кафедра дифференциальных уравнений. Её первым заведующим назначается А.В. Гельфанд. Он проработает в этой должности до эвакуации из Минска вместе с семьёй в конце июня 1941 года.

В конце 1938 г. в журнале «Известия АН СССР. Серия математическая» выходит статья А.В. Гельфанда [3], представленная академиком АН СССР С.Н. Бернштейном, в которой дано подробное доказательство всех результатов, анонсированных в докладе на Втором Всесоюзном математическом съезде.

Ранней весной 1941 г. в издательстве БГУ вышла небольшая брошюра А.В. Гелфанда [4], в которой А.В. Гельфанд ставит своей задачей «по мере возможности, освободиться от тех дополнительных ограничений, которые накладывались в обобщенной теореме С.А. Чаплыгина на заданную систему дифференциальных уравнений. И на основании этого показать, что обобщенная теорема С.А. Чаплыгина заключает в качестве частного случая теорему С.А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах».

Арон Вульфович Гельфанд с семьёй (жена Дучицкая Песя Марковна, дочь Рема (1930 г.р.) и сын Владимир (1941 г.р.)) были эвакуированы в Казахстан (г. Кзыл-Орда). Здесь А.В. Гельфанд умер 1 октября 1943 г.



2. Крогиус Владимир (Вольдемар) **Адольфович** родился 4 мая 1876 г. в Казани [5] в семье коллежского асессора Адольфа Августовича Крогиуса (1842-1883, лютеранского вероисповедания, из дворян, окончил Николаевское инженерное училище в Санкт-Петербурге и был военным инженером в отставке [6]) и дворянки Юлии Ивановны (Зидерштедт).

После смерти отца, который к этому моменту был нотариусом Витебского окружного суда, семья вернулась в Санкт-Петербург, где по окончании одной из гимназий Владимир поступил в Императорский Петербургский университет на физико-математический факультет. Окончив учебу, стал учителем математики в гимназиях Петербурга.

Пока не известно, где работал Владимир Адольфович с 1901 по 1911 гг., но известно, что он дружил с известным математиком-методистом С.И. Шохор-Троцким и помогал ему в проведении летних учительских курсов. Не случайно на Первом Всероссийском

съезде преподавателей математики, проходившем с 27 декабря 1911 г. по 3 января 1912 г. в Петербурге, Шохор-Троцкий, который был председателем секции «Методика математики», в качестве своего заместителя выбрал В.А. Крогиуса [7]. 28 декабря 1911 г. на заседании секции В.А. Крогиус прочитал доклад «Приближенные и сокращенные вычисления» ([8], с.231-244). По мысли В.А. Крогиуса, «теория приближенных вычислений решает две основных задачи: во-первых, по данным приближенным значениям вычислить результат с наибольшей возможной точностью, во-вторых, по данным точным или заданным с малой погрешностью значениям найти результат с наперёд заданной точностью». В России сокращенные вычисления разработал П.А. Долгушин (1861–1926), который в своем выступлении на съезде поддержал предложение В.А. Крогиуса о знакомстве с приближенными вычислениями в низших классах средней школы, однако на 2-м Всероссийском съезде преподавателей математики в Москве (на рубеже 1913-1914 гг.) эта идея не нашла поддержки, хотя В.А. Крогиус издаёт брошюру «Приближённые и сокращенные вычисления в средней школе» (СПб: 1913. 47с.). В том же 1913 г. вышла переведенная В.А и Ф.Н. Крогиусами книга Петера Трейтлейна (Peter Treutlein, 1845–1912) «Методика геометрии. Ч.2», в которой подробно описывается преподавание геометрии в школе Гёте в Карлсруэ.

Уже после 2-го съезда преподавателей математики вышла книга В.А. Крогиуса «Прямолинейная тригонометрия» [9], сделавшая его знаменитым – уже в СССР она выдержала в 20-х годах четыре издания. Где работал В.А. Крогиус в 1913-1918 гг. точно неизвестно, но с 1918 г. он работал в Педагогической академии в должности профессора. В 1923 г. Педагогическая академия вливается в Педагогический институт им. А.И. Герцена (ЛГПИ), но Владимира Адольфовича нет в числе перешедших в ЛГПИ преподавателей. Где он был до 1929 г. пока установить не удалось, однако это время отмечено его переводами с немецкого языка книг [10] и [11]. Первая из них восполняет, как пишет переводчик, пробел в связях математики с реальной жизнью и развивает творческую активность учащихся. Вторая книга служит для первоначального знакомства с геометрическими фигурами и телами. В

1928 г. выходит карманное издание книги [12], в которой даны советы и указания для каждого года обучения в школе.

С 1929 г. В.А. Крогиус начинает преподавать в ЛГПИ им. А.И. Герцена в должности доцента кафедры методики математики, а в 1935 г. он назначается заведующим этой кафедрой и ему присваивается звание профессора.

5 сентября 1931 г. вышло Постановление ЦК ВКП(б) о начальной и средней школах, одним из результатов которого стала острая необходимость написания новых «идеологически правильных» учебников для школы. Для этого стали создаваться бригады из нескольких соавторов. В бригаду из 6 человек для написания учебника по алгебре, состоявшего из двух частей ([13], [14]), вошел и В.А. Крогиус. Вся «новая идеология» учебника алгебры уместилась в предисловии первого выпуска, подписанного вместо авторов словом «бригада». В том же 1932 г. В.А. Крогиус в составе бригады из 4-х человек пишет и издаёт учебник по арифметике [15], в первой главе которого имеется краткий, но интересный исторический очерк. Наконец, в том же 1932 г. выходит второе издание книги [16], в которой появились разделы по применению тригонометрии в реальной жизни.

В 1935 г. выходит брошюра В.А. Крогиуса «Лекции по методике математики. Квадратическая функция» [17]. Изложение Крогиусом этого материала сохранялось в школьных учебниках вплоть до 60-х годов XX века. В 1936-1940 гг. у В.А. Крогиуса ежегодно выходят статьи о преподавании тригонометрии, а также затронуты темы, связанные с биномом Ньютона.

С началом Великой Отечественной войны В.А. Крогиус остаётся в Ленинграде, выполняя обязанности заведующего кафедрой методики математики и читая лекции оставшимся студенткам. В декабре 1941 г. было принято решение об эвакуации 112 старейших профессоров и преподавателей ЛГПИ. В их число вошёл и В.А. Крогиус. Эвакуировали Дорогой жизни по льду Ладожского озера, а далее железной дорогой в город Молотов (ныне Пермь). К сожалению, следы В.А. Крогиуса затерялись. Не известно ни место смерти, ни дата. Предположительно он умер в феврале 1942 года.

Список источников

1. Список членов I Всесоюзного съезда математиков в Харькове 24-29 июня 1930 г. С. 358-368. / Труды Первого Всесоюзного съезда математиков. М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. 368 с.

2. Гельфанд А.В. Приближенное интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка / А.В. Гельфанд // Труды 2-го Всесоюзного математического съезда. Т.2. Секционные доклады. Изд-во АН СССР, 1936. С.409-411.

3. Гельфанд А.В. Приближенное интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка // Известия АН СССР. Сер. матем. 1938. Т.2. Вып.5. С. 583-594.

4. Гельфанд А.В. К вопросу о приближенном интегрировании систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск: Изд-во БГУ, 1941. 16 с.

5. Профессора Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена в XX веке. СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2000. 391 с.

6. Брюховецкий Р.И. Крогиус Адольф Августович / Школы военных инженеров в 1701-1960 годах» (https://viupetro2.3dn.ru/-publ/lile_i_i/13-1-0-170)

7. Список членов и гостей съезда / Труды 1-го Всероссийского Съезда преподавателей математики. Т.II. Секции. – СПб: Тип. «Север», 1913. 363с.

8. Крогиус В.А. Приближенные и сокращенные вычисления в средней школе. / там же.

9. Крогиус В.А. Прямолинейная тригонометрия (5-е издание). М.-Л.: Госиздат, 1929. 112с.

10. Мартин П., Шмидт О. Геометрия дома, поля и мастерских (Второе издание, перевод с немецкого В.А. Крогиуса). Л.: Госиздат, 1924. 124с.

11. Трейтлейн П. Наглядное обучение геометрии (Перевод с немецкого В.А. Крогиуса). Л.-М.: Госиздат, 1925. 90с.

12. Крогиус В.А., Попова Н.С. Спутник преподавателя математики. М.: Госиздат, 1928. 147с.

13. Евреинов Н.Д., Каминский Б.Д., Крогиус В.А., Ляпин С.Е., Софронов В.С, Страхов Н.И. Алгебра. Выпуск первый. Учебник для

VI года ФЗС и II года ШКМ (Под общей ред. В.А. Крогиуса, С.Е. Ляпина, Т.Г. Савранского) – М.-Л.: Учпедгиз, 1932. – 127с.

14. Евреинов Н.Д., Каминский Б.Д., Крогиус В.А., Ляпин С.Е., Софронов В.С, Страхов Н.И. Алгебра. Выпуск второй. Учебник для VII года ФЗС и III года ШКМ (Под общей ред. В.А. Крогиуса, С.Е. Ляпина, Т.Г. Савранского) – М.-Л.: Учпедгиз, 1932. – 94 с.

15. Крогиус В.А., Ляпин С.Е., Сигов И.А., Шидловская М.М. Арифметика. Учебник для V года ФЗС и 1-го года ШКМ (Под общей ред. В.А. Крогиуса и Т.Г. Савранского) – М.-Л.: Учпедгиз, 1932. – 167 с.

16. Крогиус В.А. Тригонометрия: Для рабфаков, техникумов и школ повышенного типа. (Издание второе, переработанное и дополненное). – М.-Л.: Учпедгиз, 1932. – 168с.

17. Крогиус В.А. Лекции по методике математики. Квадратическая функция. – Л.: Изд-во ЛГПИ им. А.И. Герцена, 1935. – 35 с.

18. Крогиус Н.В. Шахматы. Игра и жизнь. – М.: Феникс, 2011. 400 с.

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 514

В.С. Секованов, Е.В. Виноградов, В.А. Ивков, Р.А. Щепин

Нейтральные циклы полиномов

В статье приведены примеры функций, имеющих нейтрально-рациональные и нейтрально-иррациональные неподвижные точки. С помощью математических методов и компьютерных экспериментов выявлены функции, имеющие лепестки Ло-Фату и диски Зигеля. Приведены примеры функций, имеющих неподвижные притягивающие точки и нейтрально рациональные неподвижные точки. Выявлена функция, имеющая рационально-нейтральные и иррационально нейтральные неподвижные точки. Разработаны алгоритмы построения множеств Жюлиа, имеющих лепестки Ло-Фату, диски Зигеля и отмечены орбиты точек, характеризующие тип неподвижных точек.

Ключевые слова: *множество Жюлиа, неподвижная точка, нейтрально-рациональная неподвижная точка, нейтрально-иррациональная неподвижная точка, параболическая точка, Лепесток Ло-Фату, диск Зигеля.*

V.S. Sekovanov, E.V. Vinogradov, V.A. Ivkov, R.A. Shchepin

Neutral cycles of polynomials

The article provides examples of functions with neutral-rational and neutral-irrational fixed points. Using mathematical methods and computer experiments, functions with lobes and Siegel discs have been identified. Examples of functions with fixed attracting points and neutrally rational fixed points are given. A function with rationally neutral and irrationally neutral fixed points has been identified. Algorithms for constructing Julia sets with lobes of Fatou, Siegel disks, and orbits of points characterizing the type of fixed points are developed.

Keywords*: Julia set, fixed point, neutral-rational fixed point, neutral-irrational fixed point, parabolic point, Lo Fatou lobe, Siegel disk.*

Одним из центральных понятий современной математической дисциплины – голоморфной динамики являются множества Жюлиа, имеющие многочисленные приложения в физике, экономике, компьютерной графике, теории хаоса и других дисциплинах. Тесно связаны с множествами Жюлиа полиномов лепестки Ло-Фату, диски Зигеля.

Исследованиям в области голоморфной динамики посвящены многочисленные исследования, среди которых укажем [1-6].

В данной статье мы выявим полином, имеющий нейтрально – рациональную неподвижную точку и притягивающую неподвижную точку.

Также укажем полиномы, имеющий нейтрально – рациональную неподвижную точку и отталкивающую неподвижную точку. Выявим также полином, который имеет нейтрально рациональную и нейтрально-иррациональную неподвижные точки. Наконец, приведем пример полинома, который имеет только параболические точки.

В статье разработан алгоритм построения множеств Жюлиа, лепестков Ло-Фату и дисков Зигеля.

Помимо научного исследования статья имеет дидактическую направленность. Перечисленные выше множества для студента являются новыми понятиями, изучение которых требует нестандартного мышления, что позитивно влияет на развитие его креативности. Отметим, что построение данных множеств невозможно без использования компьютерных средств, что указывает на естественную интеграцию математических методов и компьютерных технологий. Строятся множества Жюлиа, лепестки Ло-Фату, диски Зигеля с помощью компьютерных программ. Данные множества являются одними из самых сложных и красивых математических объектов, что благотворно влияет на развитие креативности и компетентности студентов, магистрантов и аспирантов физико-математических и инженерных направлений подготовки.

Введем несколько понятий. Пусть неподвижная точка z такова, что $f_c'(z) = e^{2\pi it}$, где t – рациональное число. Тогда точка z называется нейтрально-рациональной (параболической) точкой. Если же t – иррациональное число, то точка z называется нейтрально-иррациональной неподвижной точкой.

Рассмотрим семейство полиномов комплексной переменной $f_c(z) = z^5 + cz^4 + z$. Найдем неподвижные точки данного семейства при каждом значении параметра c. Имеем $z^5 + cz^4 + z = z$. Из последнего уравнения получим $z^5 + cz^4 = 0$. Следовательно, $z_1 = 0, z_2 = 0, z_3 = 0, z_4 = 0, z_5 = -\mathrm{c}$.

Далее для выяснения характера неподвижных точек вычислим производную функции при каждом значении параметра c. Имеем: $f_c'(z) = 5z^4 + 4cz^3 + 1$. Заметим, что $f_c'(z_i) = 0$ при $i = 1,2,3,4$, а $f_c'(z_5) = f_c'(-c) = 5(-\mathrm{c})^4 + 4c(-\mathrm{c})^3 + 1 = c^4 + 1$.

Положим в нашем семействе $c = 0$. Получим $f_0(z) = z^5 + z$. Замечаем, что каждая из пяти неподвижных точек будет параболической и функция $f_0(z) = z^5 + z$ будет иметь три лепестка Ло-Фату (Рис. 1).

На Рис.1 изображен цветок Ло-Фату, имеющий три лепестка.

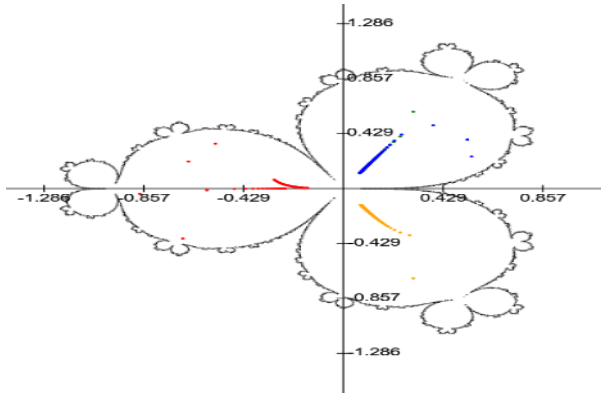


Рис.1. Три лепестка Ло-Фату функции $f_0(z) = z^4 + z$

Заметим, что области непосредственного притяжения для трех притягивающих направлений напоминают воздушные шары, соединенные вместе в параболической нулевой точке и разделенные отталкивающими направлениями.

Выявим теперь функцию, которая имеет нейтрально-рациональные неподвижные точки и отталкивающую неподвижную точку.

Положим $c = 1{,}1$. Тогда $z_1 = 0, z_2 = 0, z_3 = 0, z_4 = 0, z_5 = -1{,}1$. Следовательно, $f_c'(z_i) = 0, i = 1,2,3,4$. А $f_{1,1}'(z_5) = f_{1,1}'(-1{,}1) = (-1{,}1)^4 + 1 > 1$. Таким образом, неподвижные точки $z_1 = 0, z_2 = 0, z_3 = 0, z_4 = 0$ являются нейтрально-рациональными, а неподвижная точка $z_5 = -1{,}1$ будет отталкивающей (Рис. 2)

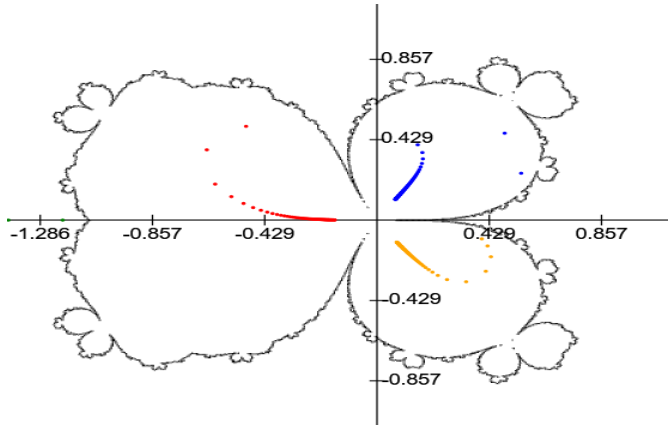


Рис. 2. Три лепестка Ло-Фату и отталкивающая неподвижная точка функции $f_{1,1}(z) = z^5 + 1{,}1z^4 + z$

Заметим, что области непосредственного притяжения из трех притягивающих направлений напоминают два надутых воздушных шара и третье направление напоминает приспущенный воздушный шар, соединенные вместе в параболической нулевой точке и разделенные отталкивающими направлениями. Заметим, что точка $z_5 = -1{,}1$ принадлежит отталкивающему направлению и потому ее орбита уходит на бесконечность.

Рассмотрим теперь функцию $f_{(1+i)\cos(o,65)}(z) = z^5 + (1 + i)\cos(0{,}65)z^4 + z$. В данном случае имеем $z_5 = -(1 + i)\cos(0{,}65)$ и

$$f'_{(1+i)\cos(o,65)}(z_5) = (-(1 + i)\cos(0{,}65))^4 + 1$$
$$= (1 + i)^4(\cos(0{,}65))^4 + 1 =$$

$= 2i \times 2i \times (\cos(0{,}65))^4 + 1 = -4 \times (\cos(0{,}65))^4 + 1 \approx -0{,}607$. Таким образом, точка $z_5 = -(1+i)\cos(0{,}65)$ – неподвижная притягивающая точка, а точки $z_1 = 0, z_2 = 0, z_3 = 0, z_4 = 0$ – нейтрально-рациональные неподвижные точки (Рис.3).

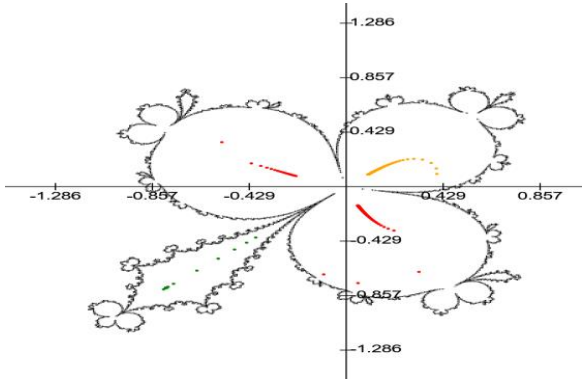


Рис.3. Три лепестка Ло Фату и притягивающая неподвижная точка функции $f_{(1+i)\cos(0{,}65)}(z) = z^5 + (1+i)\cos(0{,}65)z^4 + z$

Заметим, что области непосредственного притяжения для трех притягивающих направлений напоминают воздушные шары, соединенные вместе в параболической нулевой точке и четвертое притягивающее направление, напоминающее клин, внутри которого находится неподвижная притягивающая точка $z_5 = -(1+i)\cos(0{,}65)$. Один конец клина соединяется с параболической нулевой точкой, а другой конец клина находится на положительном расстоянии от нее. Если мы возьмем точку z, лежащую внутри клина, то ее орбита будет стремиться к неподвижной притягивающей точке $z_5 = -(1+i)\cos(0{,}65)$. Если мы возьмем достаточно малую окрестность точки z_5, то ее орбита устремится к z_5 по любому направлению. Отметим также, что клин и воздушные шары разделены отталкивающими направлениями.

Покажем, что существуют в данном семействе функции, которые имеют нейтрально рациональные (параболические) неподвижные точки и нейтрально-иррациональную неподвижную точку, порождающую диск Зигеля.

Рассмотрим

$$c = \sqrt[4]{e^{2\pi i\left(\frac{\sqrt{9{,}98}-1}{2}\right)} - 1}.$$

Тогда $f_{\sqrt[4]{e^{2\pi i\left(\frac{\sqrt{9{,}98}-1}{2}\right)}-1}}(z) = z^5 + \sqrt[4]{e^{2\pi i\left(\frac{\sqrt{9{,}98}-1}{2}\right)} - 1}z^4 + z.$

Заметим, что как и выше $z_1 = 0, z_2 = 0, z_3 = 0, z_4 = 0$ – нейтрально-рациональные неподвижные точки, а точка

$$z_5 = -\sqrt[4]{e^{2\pi i\left(\frac{\sqrt{9{,}98}-1}{2}\right)} - 1}$$

неподвижная нейтрально-иррациональная неподвижная точка. Действительно

$$f'_{\sqrt[4]{e^{2\pi i\left(\frac{\sqrt{9{,}98}-1}{2}\right)}-1}}(z_5) = \left(\sqrt[4]{e^{2\pi i\left(\frac{\sqrt{9{,}98}-1}{2}\right)} - 1}\right)^4 + 1 = e^{2\pi i\left(\frac{\sqrt{9{,}98}-1}{2}\right)}.$$

Следовательно,

$$\left|f'_{\sqrt[4]{e^{2\pi i\left(\frac{\sqrt{9{,}98}-1}{2}\right)}-1}}(z_5)\right| = 1$$

и точка

$$z_5 = -\sqrt[4]{e^{2\pi i\left(\frac{\sqrt{9{,}98}-1}{2}\right)} - 1}$$

неподвижная нейтрально-иррациональная. Проведя соответствующие вычисления и округление, получим

$$c = \sqrt[4]{e^{2\pi i\left(\frac{\sqrt{9{,}98}-1}{2}\right)} - 1} \approx 0{,}753 + i0{,}369.$$

На Рис. 4 изображено множество Жюлиа для функции

$$f_{0{,}753+i0{,}369}(z)$$

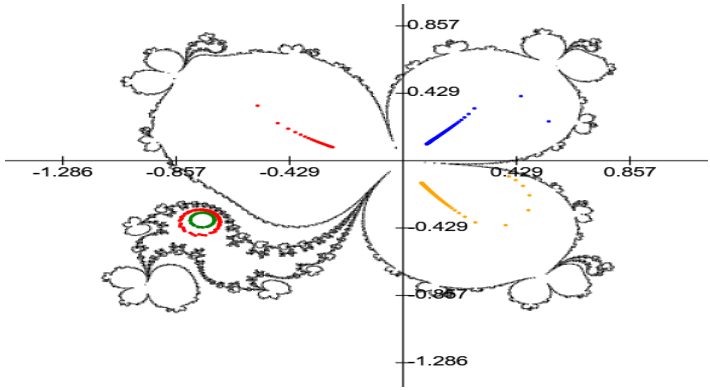


Рис. 4. Три лепестка Ло-Фату и диск Зигеля функции
$f_{0,753+i0,369}(z) = z^5 + (0,753 + i0,369)z^4 + z$

Заметим, что области непосредственного притяжения для трех притягивающих направлений напоминают воздушные шары, соединенные вместе в параболической нулевой точке и четвертое направление, напоминающее хвост, внутри которого находится неподвижная нейтрально-иррациональная точка

$$z_5 = -\sqrt[4]{e^{2\pi i\left(\frac{\sqrt{9,98-1}}{2}\right)} - 1}.$$

Один конец хвоста соединяется с параболической нулевой точкой, а другой конец хвоста находится на положительном расстоянии от нее. Если мы возьмем точку z, лежащую внутри хвоста, то ее орбита с некоторого момента будет вращаться по замкнутой кривой вокруг точки

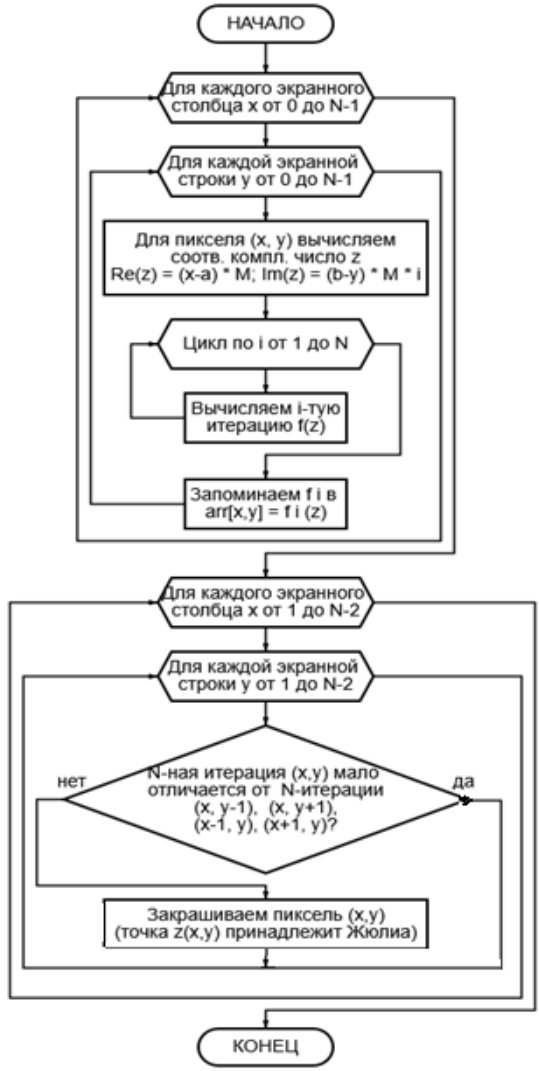
$$z_5 = -\sqrt[4]{e^{2\pi i\left(\frac{\sqrt{9,98-1}}{2}\right)} - 1}.$$

Если мы возьмем достаточно малую окрестность точки z_5, то ее орбита будет вращаться по замкнутым линиям, приближающимся к окружности. Отметим также, что хвост и воздушные шары разделены отталкивающими направлениями.

Опишем алгоритм построения множества Жюлиа методом сканирования границ:

1. Для каждого пикселя окна:

1.1. Найти соответствующее комплексное число z;



1.2. Найти N-ю итерацию числа z и запомнить её;

2. Для каждого пикселя окна, кроме крайних:

2.1. Проверить, близка ли N-ная итерация числа z N-ным итерациям чисел, соответствующих соседним пикселям.

- Если все итерации близки, пиксель не закрашиваем;
- Иначе, если хотя бы для одной из соседних точек условие близости итерации не выполняется, пиксель закрашиваем.

Будем считать два комплексных числа близкими, если модуль их разности не превышает заданного числа ε.

В заключение отметим, что нейтральные неподвижные точки влияют на форму множества Жюлиа и порождают в одних случаях лепестки Ло-Фату, а в других – диски Зигеля. Кроме того, среди неподвижных точек могут встречаться нейтральные и притягивающие неподвижные точки. А также среди неподвижных точек могут встречаться нейтральные и отталкивающие неподвижные точки.

Отметим также, что при изучении данной темы студенты с интересом решают поставленные задачи, используя как математические методы, так и информационные и коммуникационные технологии.

Библиографический список

1. Милнор Дж. Голоморфная динамика. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 320 с.

2. Пайген Х.-О, Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем: Пер. с англ. – М.: Мир, 1993. – 176 с.

3. Секованов В.С. О множествах Жюлиа рациональных функций // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. – Кострома: КГУ, 2012. – Т. 18, № 2. – С. 23-28.

4. Секованов В.С. Элементы теории фрактальных множеств. Издание пятое, переработанное и дополненное: – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. – 248 с.

5. Секованов В.С. Голоморфная динамика. Из-во «ЛАНЬ», (второе издание) Санкт-Петербург 2024 – 264 с.

6. Секованов В.С., Секованова Л.А. Исследование динамики некоторого семейства рациональных функций комплексной переменной. Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2024. № 3. С. 59-70.

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 512.555.2

А.В. Селиверстов

Линейно упорядоченные тела

В статье рассмотрена история создания линейно упорядоченных некоммутативных тел в связи с развитием геометрии. Вероятно, впервые такое тело было найдено в 1936 году Вальтером Вагнером для решения задачи об основаниях геометрии, сформулированной в 1922 году Максом Деном. Вагнер защитил диссертацию в 1937 году.

Ключевые слова: *тело, линейный порядок, плоскость, основания геометрии, история математики.*

A.V. Seliverstov

Linearly ordered skew fields

The article explores the history of the creation of linear ordered skew fields and the connection with the development of geometry. Probably, the first such skew field was discovered in 1936 by Walter Wagner to solve a problem formulated in 1922 by Max Dehn who asked about foundations of geometry. Wagner defended his dissertation in 1937.

Key words: *skew field, linear order, plane, foundations of geometry, history of mathematics.*

Телом называется ассоциативное кольцо с делением. Коммутативное тело называется полем. Наиболее известный пример некоммутативного тела – тело кватернионов – построил Уильям Гамильтон (William Rowan Hamilton, 1805-1865) в 1843 году [Конвей *et al*., 2009]. В России в XIX веке кватернионы и их обобщения изучал, в частности, Федор Эдуардович Молин (Theodor Georg Andreas Molien, 1861-1941) [Александров *et al*., 2011]. Однако тело кватернионов не может быть линейно упорядочено.

Пример некоммутативного линейно упорядоченного тела можно найти в книге [Нечаев, 1975, с. 93], однако без какой-либо исторической справки. Вероятно, впервые такое тело было найдено в 1936 году Вальтером Вагнером (Walter Wagner) для решения задачи, сформулированной в 1922 году Максом Деном (Max Wilhelm Dehn, 1878-1952) [Dehn, 1922]. Это была задача об основаниях геометрии, привлекавших внимание многих авторов в XIX веке и в начале XX века. Краткое упоминание можно найти в статье [Cerroni, 2004]. Статья Вагнера [Wagner, 1937] поступила в редакцию журнала *Mathematische Annalen* 26 июня 1936 года.

Напомним предысторию этой задачи. В 1891 году Герман Винер (Hermann Ludwig Gustav Wiener, 1857-1939) из Галле (Halle) сообщил о независимости теоремы Дезарга (на плоскости) от некоторых аксиом плоскости [Wiener, 1891]. Точнее, такова поздняя интерпретация его результата в работах [Moulton, 1902] и [Васильев, 1923]. Винер не указывает никакой системы аксиом в привычном виде, а использует лишь набор допустимых операций. Вероятно, это была первая попытка обосновать нетривиальность теорем Паппа (Паскаля) и Дезарга.

Следующий шаг сделал Давид Гильберт в 1899 году в книге *Grundlagen der Geometrie*. В ней построен пример недезарговой плоскости, удовлетворяющей группам аксиом сочетания (инцидентности) на плоскости, порядка, параллельности и непрерывности. Другой результат Гильберта состоит в возможности сопоставить дезарговой плоскости тело, элементы которого будут координатами. Коммутативность умножения, когда тело будет полем, эквивалентна выполнимости теоремы Паппа. Книга *Основания геометрии* Гильберта в переводе на русский публикуется в 1923 году в Петрограде книгоиздательством «Сеятель» Е.В. Высоцкого. Перевод сделан с 5-го издания. Русское издание включает большую (24 с.) вступительную статью Александра Васильевича Васильева (1853-1929), в которой рассмотрена история аксиоматического подхода в геометрии [Васильев, 1923]. В частности, отмечается важность работы Винера.

Изящный пример недезарговой плоскости нашёл американский астроном Форест Рэй Моултон (Forest Ray Moulton, 1872-1952), который представил свою работу 2 января 1902 года [Moulton, 1902]. В этой работе Моултон ссылается на Винера [Wiener, 1891] и Гильберта.

В 1937 году Вальтер Вагнер (Walter Wagner) из Касселя (Kassel) защитил диссертацию *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme* [Wagner, 1937] во Франкфуртском университет имени Иоганна Вольфганга Гёте (Goethe-Universität Frankfurt am Main) под руководством Макса Дена и Карла Зигеля (Carl Ludwig Siegel, 1896–1981). Вагнер использует аксиоматику Гильберта и линейно упорядоченные некоммутативные тела. Координаты над телом обеспечивают выполнимость теоремы Дезарга, а некоммутативность препятствует выполнимости теорем Паппа и Паскаля. Ниже дан перевод фрагмента из введения к работе [Wagner, 1937]. Здесь теорема Паппа названа теоремой Паскаля, как было и в предыдущих работах Винера и Гильберта. Эту особенность также отмечает Васильев [Васильев, 1923].

«Важное центральное положение, которое теорема Паскаля занимает в структуре геометрии, послужило причиной следующего исследования. Если принять плоские и пространственные аксиомы сочетания и аксиомы порядка по версии Гильберта, то теорема Дезарга справедлива в этой геометрии. Теорему Паскаля можно доказать, добавив либо аксиомы конгруэнтности, либо аксиому Архимеда. Однако в обоих случаях добавленные аксиомы охватывают больше, чем необходимо для доказательства теоремы Паскаля. Это приводит к вопросу о том, существуют ли теоремы инцидентности между теоремами Дезарга и Паскаля, т.е. теоремы, которые не следуют из теоремы Дезарга и не влекут за собой теорему Паскаля. Эта задача решается с помощью алгебраических методов. На основе аксиом сочетания и порядка, по Гильберту, геометрические соотношения можно описать дезарговой числовой системой. В такой числовой системе действуют обычные арифметические правила, лишь не предполагается коммутативности умножения, но выполняются аксиомы порядка.»

Исходный фрагмент по-немецки:

Die wichtige zentrale Stellung, die der Pascalsche Satz im Aufbau der Geometrie hat, war der Anlaß zu der folgenden Untersuchung. Setzen wir die ebenen und räumlichen Axiome der Verknüpfung und die Axiome der Anordnung in der Hilbertschen Fassung voraus, so gilt in dieser Geometrie der Desarguessche Satz. Der Pascalsche Satz läßt sich beweisen, wenn man entweder die Axiome der Kongruenz oder

das Archimedische Axiom hinzunimmt. Aber in beiden Fällen umfassen die hinzugenommenen Axiome mehr, als zum Beweise des Pascalsehen Satzes noch notwendig ist. Das führt zu der Frage, ob es Schnittpunktsätze zwischen dem Desarguesschen und dem Pascalschen Satz gibt, d.h. solche Sätze, die nicht aus dem Desarguesschen Satz folgen und den Pascalschen Satz nicht zur Folge haben.

Dieses Problem wird mit algebraischen Methoden in Angriff genommen. Unter Zugrundelegung der Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome kann man nach Hilbert durch ein Desarguessches Zahlensystem die geometrischen Beziehungen beschreiben. In einem solchea Zahlensystem gelten die gewöhnlichen Rechenregeln, nur die Vertauschbarkeit der Faktorenreiheafolge wird nicht vorausgesetzt, dagegen sind die Anordnungsaxiome erfüllt.

В 1948 году близкой теме посвящена работа Эмануэля Шпернера (Emanuel Sperner, 1905–1980) [Sperner, 1948], но без ссылки на Вагнера. Отметим, что Вагнер и Шпернер используют разную терминологию: Вагнер пишет о числовой системе (Zahlensystem), а Шпернер пишет про тело (Körper, Schiefkörper), что вполне согласуется с традицией в России. Диссертация Вагнера не упоминается и в недавней статье [Zaka *et al.*, 2021].

Автор благодарит Ксаверия Малышева и Николая Добровольского за обсуждение работы.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИППИ РАН, утвержденного Минобрнауки России.

Библиографический список

1. Конвей Дж.Х. О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях / Дж.Х. Конвей, Д.А. Смит. Пер. с англ. С.М. Львовского. М.: МЦНМО, 2009. 184 с. (Перевод: Conway J.H., Smith D.A. On Quaternions and Octonions. A.K. Peters/CRC Press, 2003. 172 p.)

2. Александров И.А., Ф.Э. Молин – ученый и педагог / И.А. Александров, П.А. Крылов // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2011. № 3(15). С. 6-11. URL: http://mi.mathnet.ru/vtgu201

3. Нечаев В.И. Числовые системы. Пособие для студентов пед. ин-тов. М.: Просвещение, 1975. 199 с.

4. Dehn M. Über die Grundlagen der Geometrie und allgemeine Zahlsysteme / M. Dehn // Mathematische Annalen. 1922. V. 85. № 1. P. 184-194. URL: https://doi.org/10.1007/BF01449618

5. Cerroni C. Non-Desarguian geometries and the foundations of geometry from David Hilbert to Ruth Moufang / C. Cerroni // Historia Mathematica. 2004. V. 31. № 3. P. 320-336. URL: https://doi.org/-10.1016/S0315-0860(03)00049-1

6. Wagner W. Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme / W. Wagner // Mathematische Annalen. 1937. V. 113. P. 528-567. URL: https://doi.org/10.1007/BF-01571649

7. Wiener H. Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie / H. Wiener // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1890/91. V. 1. P. 45-48.

8. Moulton F.R. A simple non-Desarguesian plane geometry / F.R. Moulton // Transactions of the American Mathematical Society. 1902. V. 3. P. 192-195. URL: https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1902-1500595-3

9. Васильев А.В. От Евклида до Гильберта / А.В. Васильев // Вступительное слово в книге: Д. Гильберт. Основания геометрии. Петроград: Сеятель, 1923.

10. Sperner E. Beziehungen zwischen geometrischer und algebraischer Anordnung / E. Sperner // Archiv der Mathematik. 1948. V. 1. № 2. P. 148-153. URL: https://doi.org/10.1007/BF02039526

11. Zaka O. Ordered line and skew-fields in the Desargues affine plane / O. Zaka, J.F. Peters // Balkan Journal of Geometry and Its Applications. 2021. V. 26. № 1. P. 141-156. URL: https://doi.org/10.48-550/arXiv.1905.03859

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 930.2

Е.Р. Симонова

Р.А. Симонов – участник Колмогоровских чтений

В статье рассмотрен ряд пленарных докладов Рэма Александровича Симонова, участника Колмогоровских чтений с 2004 по 2017 годы. В этих докладах раскрыто творчество первого русского ученого математика XII века – Кирика Новгородца, занимавшегося расчетом дней Пасхи православного календаря, «большими числами», разработкой оригинальной системы счета времени с учетом его цикличности.

Ключевые слова: *православный календарь, счет времени, цикличность, Кирик Новгородец*

E.R. Simonova

R.A. Simonov – participant of the Kolmogorov readings

The article examines a number of plenary reports by Rem Aleksandrovich Simonov, a participant in the Kolmogorov Readings from 2004 to 2017. These reports reveal the work of the first Russian mathematician of the 12th century, Kirik Novgorodets, who was engaged in calculating the days of Easter of the Orthodox calendar, "large numbers", and developing an original system for counting time taking into account its cyclicity.

Key words: *Orthodox calendar, time counting, cyclicity, Kirik Novgorodets.*

Рэм Александрович Симонов – известный историк древнерусской математики и естествознания, признанный специалист в области вспомогательных исторических дисциплин (хронологии, метрологии, геральдики, эпиграфики и др.), книговед и историк книги, доктор исторических наук, профессор [Самарин А.Ю., 2015, с. 132-134] оставил научное наследие, составляющее около

900 научных работ: статей, выступлений на конференциях, учебных пособий, монографий. Одной из его любимых конференций были Колмогоровские чтения. Рэм Александрович не уставал подчеркивать важность для научного сообщества этих чтений и высоко их ценил. Для него было делом чести подготовить интересное выступление, удивить слушателей. Профессор Симонов был бессменным участником чтений с 2004 по 2017 годы.

Хочу напомнить, что основная проблема, занимавшая Рэма Александровича, – формирование отечественных естественнонаучных представлений, включая историю математики. В этой связи особо ценно творчество Кирика Новгородца (1110-после 1156/1158). Ему посвящены несколько докладов Рэма Александровича. Подробнее остановлюсь на двух из них.

В 2010 году пленарный доклад был посвящен важной дате в отечественной истории математики: 900-летию со дня рождения первого русского ученого математика и религиозного деятеля Кирика Новгородца [Симонов Р.А., 2010, с. 51]. Как отмечал Рэм Александрович, нет ни одного средневекового русского ученого, которого с б***о***льшим основанием можно считать предшественником научного подхода в исследовании природы времени на Руси. В трактате «Учение им же ведати человеку числа всех лет» (1136 г.) Кирик впервые математически изучил цикличность времени [Симонов Р.А., 1993].

Историки науки заметили, что трактат Кирика отличается от других средневековых сочинений тем, что не был вставлен в богословский контекст. Кирик рассматривает хронологию как средство, в какой-то степени освобождающее человека от власти Божественного провидения, как средство, находящееся у него (человека) на службе. Следовательно, выдающееся произведение Кирика, оригинальное по своему содержанию, не было традиционным и по форме. Примерно к концу XX в. не только в нашей стране, но и за рубежом «Учение» Кирика стало признаваться не просто выдающимся произведением, а начало рассматриваться как одна из вершин научного средневекового творчества [Симонов Р.А., 2010].

Через пять лет, в 2015 году, в докладе «Кирик Новгородец (XII в.) – математик Раннего Возрождения?» обосновал положительный ответ на этот вопрос.

Французский ученый Жан Делюмо выделил в качестве особенности Возрождения то, что «математика создает ткань Вселенной» [Симонов Р.А., 2015, с. 296], выступая организующе-созидательной основой революционных изменений. «Учение» Кирика представляет собой научный трактат по математическому изучению циклов христианского юлианского календаря, употреблявшегося в государственной и церковной практике Руси XII века.

Содержание «Учения» связано с терминами юлианского календаря, при этом Кирик применил свои математические способности и знания для решения сложной задачи научного обобщения данных о времени как феномене хронологии. В первых пяти параграфах речь идет о единицах счета времени – годе, месяце, неделе, дне, часе. При этом понятие часа расходится с современным, равным 60 мин, в «Учении» Кирик использует переменный час, равный 1/12 светлого времени суток (дня) и отдельно 1/12 ночи тех же суток.

В следующих 15 разделах «Учения» говорится о календарных понятиях: индикте (15-летнем цикле), солнечном круге (28-летнем цикле), лунном круге (19-летнем цикле), «о веках мира» (тысячелетнем цикле), «о великом круге» (цикле в 532 года), природных циклах «поновлений» неба, земли, моря и вод. «Учение» Кирика также содержало сведения о циклах лунно-солнечного календаря, Рэм Александрович предположил, что это может являться отражением параллельного употребления в русском быту того времени лунного месяца и лунного года. Оригинальным является раздел «О дробных делениях часа» о мелких и мельчайших временны***х*** единицах, построенных по пятеричному делению часа и последовательно получаемых «часцов», до седьмого дробного «часца» включительно. Неоднократно в «Учении» Кирика встречаются мотивы компутистики (пасхалистики). Так, он сообщает даты еврейского Песаха и христианской Пасхи в 1136 г., предварительно указывая календарные понятия, которыми он пользовался для их расчета.

Доказывая свое предположение, Рэм Александрович показал, что в математическом творчестве Кирика Новгородца находила проявление возрожденческая точная наука. Для правильного понимания роли Кирика в этом процессе следует опираться на те

задачи, которые ставила перед собой математика эпохи Возрождения. Главной задачей было развитие компутистики - искусства вычисления дат Пасхи на столетия вперед. Как известно, теория календаря получила новый импульс для своего развития в XI-XII вв., когда Европа ознакомилась с достижениями арабской математики и астрономии. Почти одновременно в ряде стран латинского Запада появляется ряд работ по компутистике. Трактат Кирика «Учение им же ведати человеку числа всех лет» отечественные историки науки относят к этому же кругу.

Остановимся на отдельных примерах западных мотивов в «Учении». Так, в нем содержится уникальная пятеричная система последовательного деления часа на все более мелкие «часцы». Отечественные исследователи считают знаменитого ирландского компутиста Беду Достопочтенного (ум. 735) и его последователей предшественниками Кирика в пятеричном делении часа. Кирик мог взять исходный принцип Беды о делении часа на пять частей, и развить его дальше.

Второй пример. В «Учении» имеется загадочный текст о так называемых «поновлениях» неба за 80 лет, земли за 40 лет, моря за 60 лет и вод за 70 лет. Отечественные историки науки не исключают, что сведения о «поновлениях» могли перейти к Кирику от ирландских монахов, либо могли восходить к пифагорейцам через посредство гностиков.

Третий пример. В самом конце «Учения» Кирик указывает свой возраст во всех единицах счета времени, применяемых на Руси: годах, месяцах, неделях, днях и часах. Использованный Кириком прием записи возраста до него встречался в латинских эпитафиях, сообщавших, что некий покойник прожил столько-то лет, месяцев, дней, часов и скрупулов [Симонов Р.А., 2015, с. 299].

Наиболее вероятным путем, по которому в «Учение» попали идеи западноевропейских компутистов и, скорее всего, сам замысел написания этого трактата по теории календаря Кирик мог усвоить в Антониевой обители, монахом которой он был. Получается, что Кирик Новгородец, будучи профессиональным гуманитарием (музыкантом, богословом, религиозным философом),

получил также известность как выдающийся математик. Синкретизм гуманитарного и точного знания является чертой Возрождения [Симонов Р.А., 2015, с. 301].

Библиографический список

1. Самарин А.Ю. Историк науки и книговед. К 80-летию Р.А. Симонова // Библиотековедение. 2010. № 1. С. 86-88; *Он же.* Замечательный исследователь древнерусской естественнонаучной книжности // Библиография и книговедение. 2015. № 1. С. 132-134.

2. Симонов Р.А. Кирику Новгородцу 900 лет. Труды VIII Международных Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2010, С. 51-60.

3. Симонов Р.А. Древнерусская книжность (В свете новейших источников календарно-арифметического характера): Учебное пособие. М., 1993.

4. Симонов Р.А. Кирик Новгородец (XII в.) – математик Раннего Возрождения? Труды XIII Международных Колмогоровских чтений. – Ярославль: РИО ЯГПУ, 2015, С. 295-301.

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 51(091)

Г.И. Синкевич

Развитие математического анализа на страницах Acta Eruditorum. Цепная линия

1684 и 1687 гг. ознаменовались публикацией пионерских работ Лейбница и Ньютона. Оба метода позволяли определять положение касательной, участки монотонности кривой и ее экстремумы, интервалы выпуклости и точки перегиба, квадрировать кривые. Разъяснения и развитие методов взяли на себя их последователи, чему способствовал журнал Acta eruditorun, обеспечивавший коммуникацию авторов, обсуждение проблем, критику и состязательность.

Ключевые слова: *братья Бернулли, Лейбниц, Гюйгенс, цепная линия.*

G.I. Sinkevich

Mathematical analysis development on the pages of Acta Eruditorum. Catenary

The years 1684 and 1687 were marked by the publication of pioneering works by Leibniz and Newton. Both methods made it possible to determine the position of the tangent, sections of monotonicity of the curve and its extrema, intervals of convexity and points of inflection, and to square curves. Explanations and development of the methods were undertaken by their followers, which was facilitated by the journal *Acta eruditorun*, which ensured communication between authors, discussion of problems, criticism, and competition.

Key words: *Bernoulli brothers, Leibniz, Huygens, catenary.*

Возможность создавать аналитические выражения исходя из механических и физических свойств объектов с помощью модельного анализа, кинематического метода, метода неделимых, рядов, порождало ощущение полетности этого математического

процесса. В этот период были описаны такие новые кривые и поверхности, как катенария и фуникулярия (цепная и веревочная линии), велария (развевающаяся вуаль), парус, эластика (кривая, по которой изгибается стержень), брахистохрона, линтеария (линия на поверхности полотна, которым зачерпнули воду), кривая спуска и мн. др. Как говорил Я. Герман в своей речи 1726 г. *О возникновении и развитии геометрии*, «при исследовании провисания ткани (навеса, Веларии) и рисунка полотна я помещал перед глазами эти фигуры такими, какими они должны быть: я получил кривые; разделив кривые на элементы, я исследовал, на что должны влиять механические принципы в каждой, и так я спускался шаг за шагом к простейшим принципам, из композиции которых впоследствии получил построение кривой». [Hermann J. 1728].

В журнале *Acta Eruditorum*, выходившем в Лейпциге, нередко авторы статей заявляли о нерешенной проблеме, либо интриговали коллег уже решенной задачей, не сообщая ее решения, но приводя анаграмму либо логогриф (см. статью *Научные проблемы и шифрование открытий в рациональной механике XVII века* [S. Alassi], посвященную шифрам решений упоминаемых авторов), и предлагали дать свое решение к определенному сроку. Полученные решения публиковались в порядке поступления, в объявленный срок делались обзоры и обсуждались способы решений. Такой диалог порождал чрезвычайно плодотворную атмосферу.

Расскажем в качестве примера о цикле статей, посвященном созданию уравнения цепной линии. Впервые о ней заговорил Галилео Галилей в 1638 г. в *Беседах и математических доказательствах* [Галилей, с. 342-343].

Старший из братьев Бернулли, Якоб (1654-1705), занимался механикой, изучал кривизну, прочность, гибкость и упругость нитей и балок под нагрузкой. К 1687 г. вместе с младшим братом Иоганном (1667-1748) они овладели методом Лейбница.

Цепная линия описывается трансцендентной функцией, которая, равно как и показательная функция, не была известна до появления трудов Л. Эйлера (1744, 1748), В. Риккати (1757) и И. Ламберта (1761/1768). Подробнее см. *История гиперболических функций: их изучение и некоторые приложения* [Бодряков, Быков,

2018]. Но первые и самые важные шаги по этому вопросу были сделаны на страницах Acta Eruditorum в 1690-1691 гг.

В мае 1690 г. Я. Бернулли опубликовал статью о линии спуска *Анализ ранее предложенной задачи, касающейся изобретения линии спуска, равномерно проходимой тяжелым телом, так что равные высоты достигаются за равное время: и Предложение другой известной Задачи* [J. Bernoulli, 1690] и в конце ее предложил к рассмотрению новую задачу: «Найти кривизну, которую принимает свободно провисающая нить (веревка), подвешенная к двум фиксированным точкам. Я также предполагаю, что эта нить представляет собой линию, которая легко гнется во всех своих частях» [ibidem, p. 219]. Это была первая постановка задачи, впоследствии посвященной неупругой нити, упругому канату и цепной линии. В июле того же 1690 г. Лейбниц откликнулся заметкой на двух страницах *Ответ на то, что И. Бернулли опубликовал в мае месяце* [Leibniz, 1690]. Лейбниц повторяет проблему, чуть упрощая ее: «Предполагается, однако, что верёвка остаётся той же длины, что и цепь, не растягивается и не сжимается подобно струне. Поэтому я взялся за то, к чему до сих пор даже не пытался приступить, и успешно отпер запертые двери своим ключом. Эта задача … продемонстрирует определённую уникальность нашего метода; поэтому я счёл нужным, прежде чем публиковать своё решение, дать другим возможность попрактиковаться в этом искусстве. Ибо посредством этого, как посредством Лидийского камня [т.е. пробирного камня – Г.С.], мы познаем наилучшие Методы, наиболее способствующие совершенствованию науки, тем более, что здесь дело совершается не посредством долгих вычислений, а исключительно посредством искусства [ibidem, p. 360]. Лейбниц провоцировал геометров своего времени, предложив им представить к установленной дате – середине 1691 года – свой геометрический метод построения цепной линии. Позже Лейбниц дал ответ, а затем Иоганн Бернулли и Х. Гюйгенс.

Как самый старший из участников, Гюйгенс (1629-1695) с большим мастерством применял методы классической геометрии и математики бесконечно малых XVII века, предложив два уравнения вспомогательных алгебраических кривых четвертого порядка, квадратуры которых необходимы для построения катенарии (термин Catenaria, от слова catena – цепь, также принадлежит ему), и

указал точки, через которые она должна проходить. Ему потребовалась вся его изобретательность, чтобы найти удовлетворительное решение. 5 мая 1691 года Гюйгенс отправил своё решение Лейбницу. Позже Гюйгенс продолжил исследование катенарии.

Тем временем Иоганн Бернулли также решил задачу о цепной линии и отправил своё решение редактору Acta Eruditorum, в декабре 1690 года. Его решение было самым изящным, но уступало в общности решению его старшего брата. Тем временем Якоб Бернулли, занимавшийся своей общей задачей о фуникулярии (веревочной линии), призвал редактора О. Менке опубликовать решения задачи о цепной линии в марте 1691 года. Он представил статью, в которой было приложение, посвящённое задаче о цепной линии [Bernoulli, 1691]. Якоб Бернулли утверждал, что решения задачи о цепной линии могут быть обобщены на другие случаи в этом приложении, содержащем четыре отрывка. В этих отрывках Бернулли предлагает связь между катенарией и веларией (или линией изгиба паруса, надуваемого ветром), а также линтеарией (то есть линией изгиба полотна, наполненного водой) и эластикой (то есть линией упругой балки под нагрузкой). В этом приложении Бернулли объясняет связи между этими четырьмя объектами, подразумевая, что они принадлежат к одному семейству кривых. В отличие от своего брата, который торопился с поиском решений и их публикацией, Якоб обычно не спешил, формулируя всесторонний анализ, охватывающий как можно больше свойств и случаев. В его дневниках «Meditationes» под № 245 было найдено общее уравнение для всего семейства этих кривых.

В июньском номере Acta Eruditorum 1691 года были опубликованы три решения задачи о цепной линии (И. Бернулли. *Решение проблемы фуникулярии* [I. Bernoulli, 1691], Г. Лейбниц *О линии, в которую гибкий объект сгибается под действием собственного веса, и ее замечательном применении для нахождения любого количества средних пропорций и логарифмов* [Leibniz, 1691] и Х. Гюйгенс *Решение той же проблемы* [Huygens C. 1691]) вместе с предисловием редактора О. Менке, в котором описывался порядок и дата решений. В завершение шла статья Я. Бернулли *Другой образец дифференциального исчисления при измерении логарифмической спирали, локсодромий моряков и площа-*

дей сферических треугольников: вместе с некоторым дополнением к задаче о веревочной линии и др. [J. Bernoulli, 1691]. Решения сравнивались, главным образом, с установленными стандартами геометрического построения квадратур, используемых для решения трансцендентных задач. Если работа Гюйгенса была традиционным продолжением предшествующих методов построения, то работы Лейбница и И. Бернулли представляли первую физико-геометрическую конструкцию, показывающую видовое соотношение между цепной линией и логарифмическими кривыми как двумя сопутствующими кривыми – одной арифметической, другой геометрической. Лейбниц сопоставил цепную линию с логарифмикой (проведя аналогию между арифметической и геометрической прогрессиями). Рассуждение Лейбница приводит к дифференциальному уравнению, решением которого будет (в наших терминах) полусумма экспонент, представляющая гиперболический косинус. Все дифференциалы цепной линии явлены средними арифметическими соответствующих дифференциалов логарифмической кривой, а все дифференциалы логарифмической кривой – средними геометрическими дифференциалов цепной линии. И. Бернулли делает вывод, что «фуникулярная кривая не является геометрической, а скорее относится к типу, называемому механическим, поскольку ее природа не может быть выражена никаким определенным алгебраическим уравнением ...». Он излагает свои результаты без доказательств в виде построений и приводит 13 свойств фуникулярии. В опубликованном виде решения не раскрывали методов, но благодаря более поздним публикациям рукописей эти методы стали известны.

Позже Р. Гук нашел еще одно свойство цепной линии: в перевернутом виде она обуславливает наиболее устойчивую форму арочного свода.

Библиографический список

1. Бодряков В.Ю., Быков А.А. “История гиперболических функций: их изучение и некоторые приложения”, Матем. обр., 2018, № 4(88), 18-29.

2. Галилео Галилей. Избранные труды в двух томах. Том второй. Механика. О телах, пребывающих в воде. Беседы и математические доказательства. М.: Наука, 1964 – 575 с.

3. Alassi, Sepideh. Scientific Challenges and Encryption of Discoveries in the 17th Century Rational Mechanics // BSHM https://www.bshm.ac.uk/scientific-challenges-and-encryption-discoveries-17th-century-rational-mechanics Post date: 26 June 2023

4. Bernoulli, J. (J.B.) Analysis problematis Ante hac Propositi, de inventione linea descensus a corpore gravi percurreda uniformiter, sic ut temporibus aequalibus aequales altitudines emetiaetur: et alterius cujusdam Problematis Propositio //Acta Eruditorum, 1690, Maji, Anno MDCLXXXX. – p. 217-219

5. Bernoulli J. Specimen alterum Calculi differentialis in dimetienda Spirali Logarithmica, Loxodromiis Nautarum, &; Areis Triangulorum Sphaericorum: una cum Additamento quodam ad Problema Funicularium, aliisque // Acta Eruditorum. 1691. Junii. 282-290.

6. Bernoulli I. Solutio problematis funicularii // Acta Eruditorum, 1691, Junii. – p. 274-276.

7. Hermann J. De ortu et progressu Geometriae. Sermones in secundo solenni Academiae Scientiarum imperialis conventu die 1 augusti anni MDCCXXVI (17 Aug. 1726) publice recitati. Petropoli, 1728. – c. 91. В русском переводе: Третья часть речи Якоба Германа «О возникновении и развитии геометрии» на заседании Петербургской Академии наук 1 августа 1726 г. Перевод с латыни и примечания Г.И. Синкевич // История науки и техники. 2024, № 12. – С. 4.

8. Huygens C. Christiani Hugenii, Dynastae in Zülechem, Solutio ejusdem Problematis // Acta Eruditorum, 1691, Junii. – p. 282-282.

9. Leibniz G. (G.G.L.) Ejusdem ad ea, que J. Bernoullius mense Majo publicavit, responsio // Acta Eruditorum, 1690, Julii, Anno MDCLXXXX. – p. 358-360.

10. Leibniz G. De Linea in quam flexile se pondere proprio curvat ejusque usu insigni ad inveniendas quotcunque medias proportionales & Logarithmos // Acta Eruditorum, 1691. Junii. – pp. 277-281.

11. Truesdell, C., Euler, L., & Gesellschaft, S.N. The rational mechanics of flexible or elastic bodies, 1638-1788: introduction to Leonhardi Euleri *Opera omnia*, vol. X et XI seriei secundae. Auctoritate et impensis Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae: Venditioni exponunt O. Füssli, 1960. https://ci.nii.ac.jp/ncid/BA24356029

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 372.851

Ю.В. Чемарина, С.И. Морозова

Анализ заданий, вызвавших наибольшие затруднения у участников ЕГЭ по профильной математике

В работе проводится анализ выполнения заданий ЕГЭ по профильной математике в Тверском регионе на основе статистики основного периода 2025 года, в том числе сравнительный анализ результатов 2024 и 2025 годов. Рассматриваются задания с низким процентом выполнения с учетом уровня сложности для категорий, экзаменуемых с разными тестовыми баллами.

Ключевые слова: *ЕГЭ по математике, профильная математика, результаты ЕГЭ, анализ результатов ЕГЭ, ЕГЭ в Тверском регионе.*

Yu.V. Chemarina, S.I. Morozova

Analysis of tasks that caused the greatest difficulty for participants in the profile Unified State Exam in mathematics

The article analyzes the performance of tasks of the profile Unified State Exam in mathematics in Tver Region based on statistics for the main period of 2025, including a comparative analysis of the results of 2024 and 2025. Tasks with a low percentage of completion are considered, taking into account the level of difficulty for categories of examinees with different test scores.

Key words: *USE in mathematics, profile mathematics, USE results, analysis of USE results, USE in Tver Region.*

В 2025 году Тверской регион отмечает 20-летие проведения единого государственного экзамена по математике. За прошедшие годы учителями-предметниками, методическими объединениями был накоплен огромный опыт, благодаря которому большинство выпускников школ успешно проходит государственную итоговую аттестацию в форме ЕГЭ. Тем не менее в 2025 году в

Тверском регионе 105 человек не преодолели минимальный балл, что составило 4,15% от общего количества участников процедуры (по основному периоду). При этом остаются актуальными серьезные проблемы в математической подготовке учащихся: решение большого количества типовых задач вместо формирования системных знаний и умений, отсутствие навыков решения геометрических задач и несформированность культуры рассуждений и доказательств у многих выпускников [Ященко, 2024].

В данной статье мы рассмотрим задания, вызвавшие у участников ЕГЭ по профильной математике в Тверском регионе наибольшие затруднения по данным статистики основного периода 2025 года. Приведем сравнительную диаграмму среднего процента выполнения заданий по профильной математике в 2024-2025 годах

Сравнение результатов 2024 и 2025 годов показывает, что наблюдается тенденция к улучшению выполняемости заданий с кратким ответом. При этом очевидное усложнение заданий с развернутым ответом № 13, 15, 16, 18 и 19 привело к существенному снижению процента их выполняемости.

В 2025 году у участников экзамена наибольшие затруднения возникли при выполнении задачи базового уровня сложности № 3. Среди задач повышенного и высокого уровня сложности самый низкий процент выполнения имеют задачи № 14, 16, 17, 18, 19.

Далее рассмотрим результаты выполнения работы категориями экзаменуемых с разными тестовыми баллами. Среди заданий базового уровня сложности выделим те, процент выполнения которых меньше 50, а среди заданий повышенного и высокого уровня сложности – менее 15.

В группе участников, не преодолевших порога тестовых баллов, почти все задачи ожидаемо вызвали трудности. Хуже остальных из первой части (с учетом уровня сложности) оказались решены задачи № 3, № 5 и № 11.

Группа не преодолевших минимальный балл
(менее 27 баллов)

Задания базового уровня

Номер задания	Проверяемые умения	Процент выполнения
1	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	26,67
3	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	11,43
6	Уметь решать уравнения и неравенства	38,1
7	Уметь выполнять вычисления и преобразования	22,86
8	Уметь выполнять действия с функциями	12,38

Задания повышенного и высокого уровня

Номер задания	Проверяемые умения	Процент выполнения
5	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	9,52
9	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	12,38
10	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	11,43
11	Уметь выполнять действия с функциями	4,76
12	Уметь выполнять действия с функциями	12,38
13	Уметь решать уравнения и неравенства	0,48
14-19	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами, уметь решать уравнения и неравенства, уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, уметь строить и исследовать простейшие математические модели	0,00

Группа от минимального до 60 т.б.

Задания базового уровня

Номер задания	Проверяемые умения	Процент выполнения
3	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	35,16

Задания повышенного и высокого уровня

Номер задания	Проверяемые умения	Процент выполнения
13	Уметь решать уравнения и неравенства	1,37
14	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	0,00
15	Уметь решать уравнения и неравенства	0,84
16	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	0,11
17	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	0,21
18	Уметь решать уравнения и неравенства	0,00
19	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	0,03

В этой группе участников наибольшие затруднения в первой части вызвала задача № 3. Для ее решения было необходимо знание формул стереометрии и умение находить площади поверхности тел вращения. Эта группа обладает знаниями, достаточными для решения большинства задач первой части. При этом любые более сложные задачи второй части вызывают большие трудности.

Группа от 61 до 80 т.б.

Задания повышенного и высокого уровня

Номер задания	Проверяемые умения	Процент выполнения
14	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	2,92
16	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	7,19
17	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	2,46
18	Уметь решать уравнения и неравенства	0,44
19	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	0,12

Относительно хорошо (процент выполнения 53,92%) участники этой группы справились с тригонометрическим уравнением № 13, но все остальные задачи второй части вызвали значительные трудности. Особенно плохо оказались решены: сложная задача с параметром № 18 и задача № 19.

Группа от 81 до 100 т.б.

Задания повышенного и высокого уровня

Номер задания	Проверяемые умения	Процент выполнения
18	Уметь решать уравнения и неравенства	9,38
19	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	3,98

Самый низкий процент выполнения в этой группе имеют задачи высокого уровня сложности № 18 и № 19.

Отметим, что по заданиям, относящимся к алгебре и началам математического анализа, наблюдается существенное снижение среднего процента выполнения. Это обусловлено особенностями самих задач, предполагающих не только использование шаблон-

ных методов решения, но и применение всей совокупности математических знаний и приемов, которыми должны владеть выпускники. Наибольшее снижение процента выполнения наблюдается в задании № 16 с экономическим содержанием, где помимо знания схемы расчета дифференцированных платежей требовалось внимательное прочтение условия задачи и правильное определение искомой величины.

Геометрические задания № 14 и № 17 традиционно вызвали сложности у всех групп выпускников. Процент их выполнения существенно не изменился.

Процент выполнения заданий высокого уровня сложности № 18 и 19 снизился. Это связано с необходимостью использования в задаче № 18 знаний из области математического анализа (нахождение области определения и множества значений функции, исследование функции на монотонность) и в задачах № 18 и № 19 – умения проводить доказательные рассуждения.

Также стоит отметить низкую математическую культуру оформления решений задач с развернутым ответом у большинства учеников. Некоторая часть выпускников не смогла оформить верную и красивую математическую идею в виде корректного обоснованного решения, которое могло бы быть оценено в соответствии с критериями в ненулевое количество баллов.

В заключение отметим, что анализ заданий ЕГЭ, вызвавших затруднения у учащихся, является необходимым этапом при подготовке к ГИА и способствует предупреждению распространенных ошибок в будущем.

Библиографический список

1. Ященко И.В. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2024 года по математике / Ященко И.В., Высоцкий И.Р., Самсонов П.И., Семенов А.В. – М.: ФИПИ, 2024. – 39 с.

2. Демоверсии, спецификации, кодификаторы ЕГЭ 2025 год // ФИПИ URL: https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/151883967-2 (дата обращения: 05.09.2025).

3. Открытый банк заданий ЕГЭ // ФИПИ URL: https://fipi.ru/ege/otkrytyy-bank-zadaniy-ege (дата обращения: 05.09.2025).

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 531

В.Н. Чиненова

О некоторых работах В.В. Голубева

В статье рассматриваются некоторые работы профессора Московского университета В.В. Голубева, в которых синтез теории комплексного переменного и прикладных задач, связанных с механической теорией крыла самолета, позволили получить значительные результаты в аэродинамике.

Ключевые слова: *В.В. Голубев, аэродинамика, теория функций комплексного переменного, Московский университет*

V.N. Chinenova

On some works by V.V. Golubev

The article discusses some works by Professor V.V. Golubev of Moscow Universit, in which the synthesis of the theory of complex variables and applied problems related to the mechanical theory of an airplane wing allowed to obtain significant results in aerodynamics.

Keywords: *V.V. Golubev, aerodynamics, theory of functions of a complex variable, Moscow University*

Механико-математический факультет МГУ недавно отметил своё девяностолетие. Первым деканом мехмата был Владимир Васильевич Голубев, 4 декабря 2024 г. исполнилось 140 лет со дня его рождения.

Выдающийся математик, механик, педагог и организатор, член-корреспондент АН СССР Владимир Васильевич Голубев (1884-1954) проработал в Московском университете более тридцати лет. Он долгие годы заведовал кафедрой аэромеханики, дважды избирался деканом механико-математического факультета, возглавлял Научно-исследовательский институт механики МГУ,

был начальником кафедры высшей математики Военно-воздушной инженерной академии им. Н. Е. Жуковского и одновременно инженером-исследователем ЦАГИ.

Его биография детально изложена в книге И.А. Тюлиной и Л.А. Протасовой «Владимир Васильевич Голубев» [1].

В.В. Голубев превратил абстрактные области математики в инструмент познания явлений природы и техники. Он нашел способ эффективно применить теорию функций комплексного переменного к динамике твердого тела с одной неподвижной точкой, теории крыла в плоскопараллельном потоке, теории крыла конечного размаха, механизированного крыла и теории машущего крыла.

В.В. Голубев окончил физико-математический факультет Московского университета в 1908 г. Он был учеником Дмитрия Федоровича Егорова и под его руководством защитил магистерскую диссертацию «Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек» в 1916 г. Высоко оценил диссертацию Голубева А.И. Маркушевич, который в своей вступительной статье к его монографии «Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции» [2] отмечал, что фактически это классический труд по теории граничных свойств аналитических функций. В диссертации Голубева рассматриваются однозначные аналитические функции. Множество особых точек такой функции на комплексной плоскости является замкнутым и потому может быть разбито на счетное множество и множество совершенное. Следует подчеркнуть, что с диссертации Голубева началось самое широкое применение интеграла Коши в самых различных ситуациях: по незамкнутым кривым, по разрывным множествам, для построения оригинальных примеров функций с заданными свойствами.

В 1922 г. В.В. Голубев закончил большую работу «Исследования по теории особых точек», которую он начинал как диссертацию на соискание ученой степени доктора наук. Но защитить ее ему не пришлось – в 1919 г. ученые степени были упразднены.

В середине двадцатых годов научные интересы В.В. Голубева переместились в область аэродинамики. Но это не значит,

что математика была предана забвению. Наоборот, методы теории функций комплексного переменного стали основным инструментом, используемым в аэромеханике. На своем семидесятилетнем юбилее он говорил: «Обстоятельства сложились так, что я был в университете механиком, преподавал формально гидро- и аэромеханику и даже заведовал кафедрой аэромеханики. Но это была внешность. В действительности я был математиком, преподавал и занимался только математикой, но эта математика была для меня не абстрактным построением следствий из логически возможных схем, а само явление природы, физическое явление, которое можно экспериментально наблюдать, при помощи которого можно изучать окружающий мир и воздействовать на него в технике. Это была не абстрактная и бесплотная схема, это был сам окружающий нас мир с его явлениями, со всем его разнообразием и богатством цветов и красок» [3].

Первая работа В.В. Голубева по аэродинамике вышла в 1927 г. в «Трудах ЦАГИ». Это была монография «Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке» [4], в которой общим методом исследования выступает теория конформных отображений. В этой работе В.В. Голубев развивает идеи Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина в области теории крыла в плоскопараллельном потоке. Продолжением этой работы стала вышедшая в 1931 г. «Теория крыла аэроплана конечного размаха» [5]. Обе книги стали настольными для сотрудников ЦАГИ, для студентов отделения механики Московского университета, МАИ, ВВИА им. Н.Е. Жуковского.

Еще одна работа Голубева «Лекции по теории крыла» [6] посвящена гидродинамической теории крыла. Автор дает картину основных результатов, методов и задач рассматриваемой теории. При выборе и изложении материала Голубев руководствовался двумя основными идеями. Во-первых, он как можно полнее освещал механические, физические основы каждого раздела аэродинамики, исходя из того, что механика и ее технические приложения суть раздел точного естествознания и по самому своему характеру резко отличаются от того, что принято называть прикладной математикой. Во-вторых, он активно использовал аппарат

теории функций комплексного переменного. Это еще раз подтверждает то, что эта теория, помимо присущих ей, как и всякой другой математической дисциплине, внутренних, вызываемых развитием самой науки, задач, является в то же время рабочим аппаратом важных разделов точного естествознания и техники, также со своей стороны определяющих дальнейшее развитие теории. Голубев преодолел барьер между чистой и прикладной математикой. А методы теории функций комплексного переменного стали основными методами, используемыми им в аэромеханике.

В целом результаты Владимира Васильевича, полученные в аэродинамике, относятся к теории механизированного крыла, теории пограничного слоя, теории вихревого сопротивления, теории крыла конечного размаха, теории крыла малого удлинения, теории машущего крыла. После 1927 г. вышло более сорока работ Голубева по этой тематике.

Большое значение имели его монографии по теории крыла аэроплана, на которых воспитывалось несколько поколений инженеров и ученых. По этим книгам можно проследить развитие идей русской аэродинамической школы Жуковского – Чаплыгина.

Приложения аналитической теории дифференциальных уравнений в механике изложено В.В. Голубевым в книге «Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки» [7]. Здесь теория аналитических функций ориентирована на решение задачи о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. В.В. Голубев проанализировал решение этой задачи в трудах С.В. Ковалевской и дал новую интерпретацию её результатов. Применяя метод малого параметра, Владимир Васильевич показал, какие условия должны выполняться, чтобы исходная система уравнений движения тела не имела подвижных критических точек, т.е. критических полюсов и критических существенно особых точек. Это сочинение Голубева не только лежит на стыке математики и механики, но и является, по существу, историко-научным исследованием.

Эта книга В.В. Голубева явилась отправной точкой для работ по этой проблематике академика РАН В.В. Козлова [8], где успех достигнут благодаря применению метода малого параметра Пуанкаре, на котором акцентировал внимание В.В. Голубев.

Перу В.В. Голубева принадлежат научные биографии выдающихся отечественных ученых: Н.Е. Жуковского, С.А. Чаплыгина, П.Л. Чебышева, В.П. Ветчинкина, книга «Талант без почвы» о С.В. Ковалевской. Во многих научных работах Владимир Васильевич проводил историко-научный анализ проблем.

В.В. Голубев прошёл все этапы педагогической деятельности: от репетиторства, преподавания в воскресной и средней школах до профессорской деятельности по математике и механике в ряде ведущих высших учебных заведений нашей страны, в том числе и на мехмате МГУ.

Лекции Владимира Васильевича пользовались огромным успехом у слушателей, он обладал исключительным умением держать в напряжении аудиторию. По воспоминаниям студентов [1, с. 37-44], В.В. Голубев был требователен к слушателям, к их знаниям, форме изложения материала, внешнему виду и одновременно относился к ним с большим уважением и вниманием. Вот как вспоминает Голубева его аспирант и его заместитель, когда он был деканом мехмата МГУ, будущий профессор С.М. Тарг: «Творчество Владимира Васильевича было широким и многогранным. Но что бы он ни делал, все делалось талантливо и вдохновенно с полной отдачей всех сил. Так он работал всю жизнь до самого ее последнего дня» [9, с.15].

Библиографический список

1. Протасова Л.А., Тюлина И.А. «Владимир Васильевич Голубев». М: Наука. 1995. 208с.

2. Голубев В.В. Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции. М.: Физматгиз, 1961.

3. Последнее слово профессора Московского университета Владимира Васильевича Голубева в день семидесятилетия 3 декабря 1954 г. – Вестн. Моск. ун-та. 1955. № 2. С. 173-182.

4. Голубев В.В. Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке. 1-е изд. Тр. ЦАГИ. 1927. вып. 29. 2-е изд. М.-Л.: ГИТТЛ. 1938.

5. Голубев В. В. Теория крыла аэроплана конечного размаха. – Тр. ЦАГИ. 1931. Вып. 108.

6. Голубев В.В. Лекции по теории крыла. М.-Л.: ГИТТЛ. 1949.

7. Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат. 1953.

8. Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1980.

9. Владимир Васильевич Голубев / Сер. Математика, механика. № 10. М.: Знание. 1984.

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

УДК 531.091

А.О. Юлина

Геометрический подход к строгому изложению проблемы вращения твердого тела в работах Б.Римана и Д.К. Максвелла

В статье рассматриваются основные позиции геометрического метода решения задачи о вращении твердого тела в теоретической механике и математическом анализе до середины XIX в. Исследование касается модельных задач динамики твердого тела, связанных со сферой. Изучение гироскопических систем представлено в работе на основе фундаментальных трудов Б. Римана и Д.К. Максвелла.

Ключевые слова: *геометрический метод, вращение твердого тела, Б. Риман, Д.К. Максвелл.*

A.O. Yulina

Geometricapproach to a rigorouspresentation of the problem of rotation of a rigid body in the works of B. Riemann and D.K. Maxwell

The article examines the main positions of the geometric method for solving the problem of rigid body rotation in theoretical mechanics and mathematical analysis up to the middle of the 19th century. The study concerns model problems of rigid body dynamics associated with a sphere, which are special cases of the problem of rigid body rotation around a fixed point. The study of gyroscopic systems is presented in the work based on the fundamental works of B. Riemann and D.K. Maxwell.

Key words: *geometric method, rotation of a rigid body, B. Riemann, D.C. Maxwell.*

Введение

Задача о движении волчка является наиболее типичной среди всех динамических задач, связанных со сферой. К этой категории также принадлежит задача о движении сферического маятника (которая в действительности является частным случаем задачи о движении волчка), задача о веревочной кривой на сфере и все задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки. Простейшая задача такого рода – это движение твердого тела вокруг собственного центра тяжести.

Луи Пуансо в 1834 году в своей работе «Новая теория вращения тел» дал геометрическую интерпретацию решения Эйлера и Лагранжа. Он ввел конусы, описываемые мгновенной осью в теле и в пространстве, и тогда вращение твердого тела, имеющегоодну неподвижную точку представляется как движение некоторого конуса с вершиной в этой точке, катящегося без скольжения по поверхности неподвижного конуса с той же вершиной.

При изучении вращения твердого тела по методу Пуансо мы должны рассматривать последовательные положения мгновенной оси вращения по отношению как к направлениям, фиксированным в пространстве, так и к осям, предполагаемым в движущемся теле. Пути, прочерченные полюсом этой оси на неизменной плоскости и на центральном эллипсоиде, образуют интересные предметы математического исследования. Но когда мы пытаемся следить глазом за движением вращающегося тела, нам трудно определить, через какую точку тела проходит мгновенная ось в любой момент времени, – а определить ее путь еще труднее.

Максвелл сделал видимым путь мгновенной оси и измерил обстоятельства движения с помощью волчка, который далее мы подробно рассмотрим [1].

Волчок, который в 1856 году изобрел Максвелл, продемонстрировал управление, стабилизацию и ориентацию сложных гироскопических систем. Расположение настроек этого волчка, чтобы производить желаемые эффекты, зависит от математической теории вращения. Метод показа движения оси вращения с помощью цветного диска имеет важное значение для успешности этих настроек. Это оптическое приспособление для визуализации природы быстрого движения волчка и практических методов применения теории вращения к такому инструменту.

Математические трудности теории вращения возникают главным образом из-за отсутствия геометрических иллюстраций и чувственных образов, с помощью которых мы могли бы зафиксировать результаты анализа в нашем сознании [1].

Основные рабочие положения прибора и выводы к ним [1]

1. *Когда волчок находится в движении*, легко увидеть, в каком квадранте находится мгновенная ось в любой момент и расстояние между ней и осью инструмента; и мы наблюдаем, что мгновенная ось движется по замкнутой кривой и возвращается в свое исходное положение в теле.

2. Мы можем сделать ось инструмента центром этой замкнутой кривой, работая вертикальными болтами. Тогда она будет одной из главных осей инерции.

3. Порядок цветов можно либо красным, желтым, зеленым, синим, либо наоборот, вращая гайку на оси. Когда порядок цветов совпадает с направлением вращения, это указывает на то, что ось инструмента является осью наибольшего момента инерции.

4. Если мы закрутим две пары противоположных горизонтальных болтов на разное расстояние от оси, то траектория мгновенного полюса больше не будет равноудалена от оси, а будет описывать эллипс, большая ось которого совпадает с направлением средней оси инструмента.

5. Если мы теперь сделаем одну из двух горизонтальных осей меньше, а другую больше вертикальной оси, то мгновенный полюс отделится от оси инструмента, и ось будет наклоняться все больше и больше до тех пор, пока вращение не сможет больше продолжаться из-за наклона.

Кратко обсудим несомненные преимущества геометрической интерпретации решения проблемы вращения твердого тела вокруг неподвижной точки. Каждая точка тела описывает окружность вокруг оси и возвращается в исходное положение после каждого полного оборота. Но если сама ось находится в движении, траектории различных точек тела больше не будут круговыми или возвратными. Даже скорость вращения вокруг оси требует тщательного определения, и предположение о том, что при любом движении вокруг неподвижной точки всегда существует одна группа частиц, образующих

мгновенную ось, обычно приводится в виде очень отталкивающей массы для расчёта. Большинства этих трудностей можно избежать, уделив немного внимания механике и геометрии задачи, прежде чем переходить к обсуждению уравнений [1].

Доказывая теорему Абеля, Карл Якоби ввел знаменитые θ функции, с помощью которых гиперэллиптические интегралы могут быть представлены алгебраическими разложениями или быстросходящимися рядами. Последнее представление, с помощью рядов, очень важно в задаче о вращении твердого тела около неподвижной точки. В 1851 году Б. Риман устраняет проблему инверсии эллиптических функций Якоби, представляя тэта функции геометрическим методом. Поэтому дальнейшее исследование задачи о движении волчка имело продолжение на комлексной плоскости, направляющие косинусы при вращении тела были получены в виде частных θ или σ -функций. Получают ясность и кватернионные выражения для кинематики движения в задаче о вращения твердого тела около неподвижной точки.

Далее, работая с логарифмами, Карл Якоби получает две тета функции и раскладывает их в быстросходящиеся ряды.

Преимущество метода Римана заключается в том, что полный образ функциональной зависимости основных параметров движения от времени на временной плоскости неразрезанной «римановой поверхности» с бесконечным количеством листов может быть получен из образа для разрезанной поверхности при помощи простого присоединения прямоугольника, совпадающего с этим образом, к каждой из сторон исходного образа и, затем, повторения этого процесса для новых прямоугольников и т. д. до бесконечности, пока вся временная плоскость не будет покрыта одинаковыми прямоугольниками, любые два из которых можно совместить при помощи двух переносов, один по направлению вещественной, другой по направлению мнимой оси.

Полученный Риманом результат заключается в том, что функциональное соотношение для законов вращения относительно времени, гораздо проще чем такое же выражение в теории эллиптических функций [2].

Сначала давайте рассмотрим кривую, описываемую вершиной волчка на неподвижной сфере.

Получим для движения вершины волчка уравнение, которое представляет движение при помощи мультипликативной эллиптической функции второго порядка. Определенная тем самым кривая не является кривой, вычерчиваемой вершиной на неподвижной сфере, а ортогональной проекцией этой кривой на ху-плоскость.

Для удобства будем называть кривые, подобные только что рассмотренной, «мультипликативными эллиптическими кривыми», различая при необходимости кривые на сфере и на плоскости и присваивая им степень, соответствующую числу простых тэта -частных в выражении, которое определяет их [2].

Таким образом, кривая, вычерчиваемая вершиной волчка на неподвижной сфере, является мультипликативной эллиптической кривой первой степени, ее ортогональная проекция – кривой второй степени. Самым ранним примером такой кривой первой степени является герполодия движения Пуансо (движения тела вокруг своего центра тяжести). То, что герполодия является кривой такого рода, впервые было показано Якоби.

Легко получить представление о геометрическом характере кривой, вычерчиваемой вершиной волчка.

Возвращаясь к нашему сферическому волчку и подставляя в общие уравнения, которые мы получили значения параметров движения волчка, мы получаем для его полодии и герполодии не уравнения второй степени, что ожидалось в полученных терминах, а намного более простые выражения.

И полодия, и герполодия сферического волчка являются эллиптическими плоскими кривыми первой степени.

Выводы Римана тесно связаны со знаменитой теоремой Якоби о том, что движение волчка может быть представлено состоящим из двух движений Пуансо (или вращений вокруг центра тяжести), поскольку как полодия, так и герполодия движения волчка представляют собой герполодии движения Пуансо, так как являются эллиптическими кривыми первой степени [2].

Подытожим установленные нами заключения:
мы доказали, что движение сферического волчка с неподвижной точкой опоры может быть полностью определено геометрически в терминах эллиптических кривых первой степени. Мы также показали, что изменение параметров α, β, γ, δ по времени t можно изобразить кривыми такого же типа.

Давайте теперь возобновим исследование кривой, вычерчиваемой вершиной волчка.

Параметры α, β, γ, δ и ζ являются эллиптическими функциями переменной t и полный смысл эллиптических функций проясняется только тогда, когда аргумент может принимать комплексные значения. Только тогда, например, становится очевидной двоякопериодичность этих функций. Поэтому существует, так сказать, аналитическая необходимость завершения нашего геометрического исследования движения волчка продолжением его на комплексные значения t. Когда это будет выполнено, мы покажем, что совокупность возможных движений волчка на плоскости комплексного времени соответствует свободному движению твердого тела в неевклидовом пространстве.

Таким образом геометрическое исследование, связанное с неевклидовой интерпретацией, играет важную роль. Хотя кривые, вычерчиваемые вершиной, имеют в реальном времени вид, весьма схожий со случаем неподвижной точки опоры, риманова поверхность, описываемая вершиной на неподвижной сфере, полностью проясняет различие между эллиптическим и гиперэллиптическим типами двух движений.

Библиографический список

1. The scientific papers of James Clerk Maxwell. Edited by William Davidson. Dover publications, New York1890. P.248-260.

2. Теория функций Абеля Bernhard Riemann [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 54. S. 101-155. 1857.] Transcribed by D.R. Wilkins Preliminary Version: December 1998 Corrected: April. 2000

3. The mathematical theory of the top. Lectures delivered on the occasion of the sesquicentennial celebration of princeton university. By Felix Klein professor of mathematics in the university of gottingrn with illustrations new york charles scribner's sons.1897.

Статья поступила в редакцию 22.09.2025
Подписана в печать 26.09.2025

Сведения об авторах

Антонюк Павел Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», ассоциированный научный сотрудник ФГБУН «Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова Российской академии наук», e-mail: pavera@bk.ru

Афанасьев Владимир Васильевич – доктор педагогических наук, профессор, зав. кафедрой геометрии и алгебры ФГБОУ ВО «Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского», e-mail: afvv2018@mail.ru

Буракова Галина Юрьевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа, теории и методики обучения математике ФГБОУ ВО «Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского», e-mail: burakova.galina@inbox.ru

Вечтомов Евгений Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет», e-mail: vecht@mail.ru

Виноградов Евгений Валентинович – кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет», e-mail: e_vinogradov@kosgos.ru

Гильмуллин Мансур Файзрахманович – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и прикладной информатики Елабужского института (филиала) ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», e-mail: gilmullin.mansur@gmail.com

Евланов Максим Витальевич – магистр педагогических наук, научный сотрудник лаборатории математического и естественнонаучного образования ГУО «Академия образования», учитель физики и математики ГУО «Средняя школа №45 г.Минска», e-mail: max.57207@mail.ru

Зайцев Евгений Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», e-mail: e_zaitsev@mail.ru

Звонилов Виктор Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского», e-mail: zvonilov@itmm.unn.ru

Зубова Инна Каримовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный педагогический университет», e-mail: zubova-inna@yandex.ru

Ивков Владимир Анатольевич – кандидат экономических наук, доцент, зав. кафедрой прикладной математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет», e-mail: ivkov_wa@mail.ru

Игнатушина Инесса Васильевна – доктор педагогических наук, декан физико-математического факультета ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный педагогический университет», e-mail: streleec@yandex.ru

Калинин Сергей Иванович – доктор педагогических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет», e-mail: kalinin_gu@mail.ru

Карпова Татьяна Николаевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа, теории и методики обучения математике ФГБОУ ВО «ЯГПУ им. К.Д. Ушинского», e-mail: karpovafmf@mail.ru

Кондратьева Галина Вячеславовна – кандидат педагогических наук, доцент, зав. кафедрой высшей алгебры, математического анализа и геометрии ФГАОУ ВО «Государственный университет просвещения», e-mail: kondratevagv@mail.ru

Кузнецова Ирина Викторовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры геометрии и алгебры ФГБОУ ВО «ЯГПУ им. К. Д. Ушинского», e-mail: gits70@mail.ru

Латышева Любовь Павловна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики и методики обучения математике ФГБОУ ВО «Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет», e-mail: latisheva@pspu.ru

Леонтьева Наталия Владимировна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и информатики ФГБОУ ВО «Глазовский государственный инженерно-педагогический университет имени В.Г. Короленко», e-mail: leonteva-natalia-0812@yandex.ru

Лубягина Елена Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет», e-mail: shishkina.en@mail.ru

Малых Михаил Дмитриевич – доктор физико-математических наук, зав. кафедрой математического моделирования и искусственного интеллекта ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы», научный сотрудник лаборатории информационных технологий Объединенного института ядерных исследований, e-mail: malykh_md@pfur.ru

Малышев Ксаверий Юрьевич – ведущий программист Научно-исследовательского институт аядерной физики имени Д.В. Скобельцына МГУ имени М.В. Ломоносова, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», аспирант кафедры прикладной информатики и теории вероятностей ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы», e-mail: kmalyshev08102@mail.ru

Медер Эдуард Альбертович – профессор кафедры дизайна, рисунка и живописи ЧОУ ВО «Международный институт дизайна и сервиса», e-mail: ed_meder@mail.ru

Морозова Светлана Игоревна – ассистент кафедры информационных систем и методов искусственного интеллекта ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет», e-mail: Morozova.SI-@tversu.ru

Налбандян Юлия Сергеевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и геометрии ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», e-mail: dezhkin@mail.ru

Одинец Владимир Петрович – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: w.p.odyniec@mail.ru

Панкратова Лариса Валерьевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет», e-mail: pankratovalarisa-19@rambler.ru

Полотовский Григорий Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики НИУ Высшая школа экономики – Нижний Новгород, e-mail: polotovsky@gmail.com

Подуфалов Николай Дмитриевич – доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии образования, e-mail: londont@mail.ru

Прохоров Дмитрий Игоревич – кандидат педагогических наук, доцент, зав. кафедрой управления и экономики образования ГУО «Минский городской институт развития образования», e-mail: prohorov@minsk.edu.by

Секованов Валерий Сергеевич – доктор педагогических наук, профессор кафедры прикладной математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет», e-mail: Sekovanovvs@yandex.ru

Селиверстов Александр Владиславович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ФГБУН «Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук», e-mail: slvstv@iitp.ru

Симонова Елена Рэмовна – кандидат исторических наук, старший научный сотрудник ФБУ «Всероссийский научно-исследовательский институт документоведения и архивного дела», e-mail: elenasim789@gmail.com

Синкевич Галина Ивановна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет», e-mail: galina.sinkevich@gmail.com

Скорнякова Анна Юрьевна – кандидат педагогических наук, декан математического факультета ФГБОУ ВО «Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет», e-mail: skornyakova_anna@pspu.ru

Смирнов Евгений Иванович – доктор педагогических наук, профессор, зав. кафедрой математического анализа, теории и методики обучения математике ФГБОУ ВО «Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского», ведущий научный сотрудник Южного математического института – филиала ФГБУН ФНЦ «Владикавказский научный центр Российской академии наук», e-mail: smiei@mail.ru

Тихомиров Сергей Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии и алгебры ФГБОУ ВО «Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского», e-mail: satikhomirov@mail.ru

Чемарина Юлия Владимировна – кандидат физико-математических наук, декан математического факультета ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет», e-mail: Chemarina.YV@tversu.ru

Черемных Елена Леонидовна – кандидат педагогических наук, доцент, зав. кафедрой высшей математики и методики обучения математике ФГБОУ ВО «Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет», e-mail: cheremnyhel@pspu.ru

Чиненова Вера Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», e-mail: v.chinenova@yandex.ru

Широков Дмитрий Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет», e-mail: dimshirokov79@mail.ru

Щепин Роман Александрович – студент ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет», e-mail: kurlikchelovek-@gmail.com

Юлина Анна Олеговна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры строительной механики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет», e-mail: parfenova19761976@mail.ru

Information about the authors

Antonyuk Pavel Nikolaevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Associate Researcher, S.I. Vavilov Institute of the History of Natural Sciences and Technology of the Russian Academy of Sciences, e-mail: pavera@bk.ru

Afanasyev Vladimir Vasilyevich – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Head of the Department of Geometry and Algebra, Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky, e-mail: afvv2018@mail.ru

Burakova Galina Yuryevna – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Theory and Methods of Teaching Mathematics, Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky, e-mail: burakova.galina@inbox.ru

Vechtomov Evgeny Mikhailovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University, e-mail: vecht@mail.ru

Vinogradov Evgeny Valentinovich – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Information Technologies, Kostroma State University, e-mail: e_vinogradov@kosgos.ru

Gilmullin Mansur Fajzrakhmanovich – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics and Applied Informatics, Yelabuga Institute (branch) of Kazan (Volga Region) Federal University, e-mail: gilmullin.mansur@gmail.com

Evlanov Maxim Vitalievich – Master of Pedagogical Sciences, researcher of the Laboratory of Mathematical and Natural Science Education, State Educational Institution "Academy of Education", teacher of physics and mathematics, State Educational Institution "Secondary School No. 45 of Minsk", e-mail: max.57207@mail.ru

Zaitsev Evgeny Alekseevich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, e-mail: e_zaitsev@mail.ru

Zvonilov Viktor Ivanovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Lobachevsky National Research Nizhny Novgorod State University, e-mail: zvonilov@itmm.unn.ru

Zubova Inna Karimovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences , Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Orenburg State Pedagogical University, e-mail: zubova-inna@yandex.ru

Ivkov Vladimir Anatolyevich – Candidate of Economic Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Applied Mathematics and Information Technologies, Kostroma State University, e-mail: ivkov_wa@mail.ru

Ignatushina Inessa Vasilyevna – Doctor of Pedagogical Sciences, Dean of the Faculty of Physics and Mathematics, Orenburg State Pedagogical University, e-mail: streleec@yandex.ru

Kalinin Sergey Ivanovich – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University, e-mail: kalinin_gu@mail.ru

Karpova Tatyana Nikolaevna – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Theory and Methods of Teaching Mathematics, Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky, e-mail: karpovafmf@mail.ru

Kondratieva Galina Vyacheslavovna – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Higher Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, State University of Education, e-mail: kondratevagv@mail.ru

Kuznetsova Irina Viktorovna – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Geometry and Algebra, Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky, e-mail: gits70@mail.ru

Latysheva Lyubov Pavlovna – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Perm State Humanitarian Pedagogical University, e-mail: latisheva@pspu.ru

Leontieva Nataliya Vladimirovna – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics and Computer Science, Glazov State Engineering and Pedagogical University named after V.G. Korolenko, e-mail: leonteva-natalia-0812@yandex.ru

Lubyagina Elena Nikolaevna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University, e-mail: shishkina.en@mail.ru

Malykh Mikhail Dmitrievich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Mathematical Modeling and Artificial Intelligence, Patrice Lumumba Peoples' Friendship University of Russia, Researcher of the Information Technology Laboratory, Joint Institute for Nuclear Research, e-mail: malykh_md@pfur.ru

Malyshev Ksaverii Yuryevich – leading programmer of the D.V. Skobeltsyn Research Institute of Nuclear Physics of Lomonosov Moscow State University, graduate student of the Department of Applied Informatics and Probability Theory, Patrice Lumumba Peoples' Friendship University of Russia, e-mail: kmalyshev08102@mail.ru

Meder Eduard Albertovich – Professor of the Department of Design, Drawing and Painting, International Institute of Design and Service, e-mail: ed_meder@mail.ru

Morozova Svetlana Igorevna – Assistant Professor of the Department of Information Systems and Artificial Intelligence Methods, Tver State University, e-mail: Morozova.SI@tversu.ru

Nalbandyan Yulia Sergeevna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis and Geometry, Southern Federal University, e-mail: dezhkin@mail.ru

Odinets Vladimir Petrovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: w.p.odyniec@mail.ru

Pankratova Larisa Valeryevna – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University, e-mail: pankratovalarisa19@rambler.ru

Polotovsky Grigory Mikhailovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics – Nizhny Novgorod, e-mail: polotovsky@gmail.com

Podufalov Nikolay Dmitrievich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician of the Russian Academy of Education, e-mail: londont@mail.ru

Prokhorov Dmitry Igorevich – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Management and Economics of Education, Minsk City Institute of Educational Development, e-mail: prohorov@minsk.edu.by

Sekovanov Valery Sergeevich – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics and Information Technologies, Kostroma State University, e-mail: Sekovanov-vs@yandex.ru

Seliverstov Alexandr Vladislavovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher at the A.A. Kharkevich Institute of Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences, e-mail: slvstv@iitp.ru

Simonova Elena Ramovna – Candidate of Historical Sciences, Senior Researcher at the All-Russian Scientific Research Institute of Documentation and Archival Affairs, e-mail: elenasim789@gmail.com

Sinkevich Galina Ivanovna – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mathematics, St. Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, e-mail: galina.sinkevich@gmail.com

Skornyakova Anna Yuryevna – Candidate of Pedagogical Sciences, Dean of the Faculty of Mathematics, Perm State Humanitarian Pedagogical University, e-mail: skornyakova_anna@pspu.ru

Smirnov Eugeny Ivanovich – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Head of the Department of Mathematical Analysis, Theory and Methods of Teaching Mathematics, Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky, Leading Researcher at the Southern Mathematical Institute – branch of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, e-mail: smiei@mail.ru

Tikhomirov Sergey Alexandrovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Geometry and Algebra, Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky, e-mail: satikhomirov@mail.ru

Chemarina Yuliya Vladimirovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Dean of the Faculty of Mathematics, Tver State University, e-mail: Chemarina.YV@tversu.ru

Cheremnykh Elena Leonidovna – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Higher Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Perm State Humanitarian Pedagogical University, e-mail: cheremnyhel@pspu.ru

Chinenova Vera Nikolaevna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, e-mail: v.chinenova@yandex.ru

Shirokov Dmitry Vladimirovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University, e-mail: dimshirokov79@mail.ru

Shchepin Roman Aleksandrovich – student, Kostroma State University, e-mail: kurlikchelovek@gmail.com

Yulina Anna Olegovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics, St. Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, e-mail: parfenova19761976@mail.ru

Научное издание

Материалы Международной научно-практической конференции «XVIII Колмогоровские чтения»

17-19 сентября 2025 года

Научные редакторы:
Ирина Викторовна Кузнецова,
Сергей Александрович Тихомиров

Подписано к использованию 27.03.2026.
Электронный образовательный ресурс. Заказ № 42.
Издательство Тверского государственного университета.
Адрес: 170100, г. Тверь, Студенческий пер. 12, корпус Б.
Тел. (4822) 35-60-63.